ریاضی عمومی ۲

جلد اول: حساب دیفرانسیل توابع چندمتغیر

مؤلف:

سیّد هاشم پروانه مس[illegible]

www.ketab.ir

شماره ۴۶۶

سرشناسه: پروانه مسیحا، سیدهاشم، ۱۳۴۰-
عنوان و نام پدیدآور: ریاضی‌عمومی ۲/ مولف سیدهاشم پروانه‌مسیحا.
مشخّصات نشر: تهران: دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدّین طوسی، انتشارات،۱۳۹۷.
مشخّصات ظاهری: ج.: مصور.
شابک: دوره 978-622-6029-31-5 : ؛ ج، 978-622-6029-33-9 : ۱ ؛ ج، 978-622-6029-34-6 : ۲
وضعیّت فهرست نویسی: فیپا
مندرجات: ج.۱.حساب دیفرانسیل توابع چندمتغیر.- ج.۲. حساب انتگرال توابع چندمتغیر.
موضوع: ریاضیات -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع: ریاضیات -- مسایل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
رده بندی کنگره: QA۳۷/۲/پ۴۹
رده بندی دیویی: ۵۱۰/۷۶
شماره کتابشناسی ملی: ۵۵۰۷۷۰۰

ناشر: دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدّین طوسی press.kntu.ac.ir

عنوان: ریاضی عمومی ۲ (جلد اول: حساب دیفرانسیل توابع چند متغیر)
مؤلّف: دکتر سید هاشم پروانه‌مسیحا
نوبت چاپ: اوّل
شابک: 978-622-6029-33-9 شابک دوره: 978-622-6029-31-5
تاریخ انتشار: شهریور ۱۳۹۸، تهران
شمارگان: ۲۰۰ جلد
چاپ: پدیدرنگ
صحّافی: گرنامی
قیمت: ۷۵۰۰۰ تومان

تمام حقوق برای ناشر محفوظ است

خیابان میرداماد غربی- پلاک ۴۷۰- انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدّین طوسی - تلفن: ۸۸۸۸۱۰۵۲
میدان ونک - خیابان ولی‌عصر(عج) - بالاتر از چهارراه میرداماد - پلاک ۲۶۲۶- مرکز پخش و فروش انتشارات
تلفن: ۸۸۷۷۲۲۷۷ رایانامه: press@kntu.ac.ir - تارنما (فروش برخط): press.kntu.ac.ir

www.ketab.ir

پیش‌گفتار

به‌طور یقین، بزرگ‌ترین کشف در ریاضیات عهد باستان، هندسه اقلیدسی بوده است و پس از کشف حساب دیفرانسیل و انتگرال، یعنی بیش از دو هزار سال بعد، اهمیت هندسه اقلیدسی نمود بیشتری پیدا کرد. حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌طور مستقل در قرن هفدهم توسط ایزاک نیوتن در انگلستان و گوتفرید ویلیام لایب‌نیتز در آلمان پایه‌گذاری شد. با اینکه پاسخ بسیاری از مسایل توسط ایرانیان و یونانیان تا حدودی به‌دست آمده بود، اما مباحث حساب دیفرانسیل و انتگرال در درجه اول اهمیت برای رفع مشکلات علمی مطرح‌شده در قرن هفدهم عنوان شدند.

به‌طور عام چهار مسئله در سیر تکاملی حساب دیفرانسیل و انتگرال مورد توجه خاص بوده است. اولین مسئله، یافتن سرعت و شتاب جسم متحرک با داشتن فرمولی برای مسافت طی‌شده به عنوان تابعی از زمان است و برعکس، چگونگی یافتن سرعت و مسافت طی‌شده با داشتن شتاب جسم متحرک به عنوان تابعی از زمان، مورد نظر است. این مسئله درحوزه مطالعات حرکت مطرح بوده و مشکلی که دانشمندان در قرن هفدهم با آن مواجه بودند یافتن و محاسبه سرعت و شتاب جسم متحرک در لحظه‌ای به لحظه دیگر بود.

دو مسئله‌ای که اینجا مطرح می‌شود یکی تعریف دقیق سرعت لحظه‌ای و دیگری شیوهٔ محاسبه آن است و هر دوی این سؤالات را می‌توان با استفاده از مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال پاسخ داد. برعکس، یافتن مسافت طی‌شده با دانستن سرعت نیز دارای همین مشکلات است. نمی‌توان سرعت در هر لحظه را در زمان ضرب کرد تا مسافت طی‌شده را به‌دست آورد زیرا سرعت لحظه‌به‌لحظه متفاوت است. در حساب دیفرانسیل و انتگرال، روش محاسبه سرعت لحظه‌ای ارائه می‌شود که توسط نیوتن کشف شده است. علاوه بر آن، چگونگی یافتن مسافت طی‌شده با داشتن تابع سرعت به‌دست می‌آید.

دومین مسئله مطرح‌شده در قرن هفدهم، یافتن خط مماس به یک منحنی بود. علاقه به حل این مسئله ناشی از چند خواسته است. با آن که مسئله مماس‌ها هندسی است، اما کاربردهایی در علوم دیگر از جمله طراحی لنزها و عدسی‌ها و به‌طور عام در مباحث اُپتیک دارد که شدیداً مورد توجه فرما، هویگنس، نیوتن و دیگر دانشمندان آن زمان بود. برای مطالعه عبور نور از یک لنز، نیاز به دانستن زاویه برخورد پرتو نور به لنز بود تا بتوان از قانون انکسار استفاده کرد و در اینجا است که مسئله یافتن خط مماس مطرح می‌شود.

مسئله دیگری که نیاز به دانستن مماس داشت، مطالعه حرکت یک جسم متحرک در هر نقطه از مسیر حرکت بود. برای بررسی حرکت یک جسم متحرک در هر نقطه از مسیر حرکت، جهت مماس به مسیر در آن نقطه مورد نیاز است. لذا، مفهوم خط مماس بسیار گسترده‌تر از مفهومی است که در هندسه بیان می‌شود. در مقاطع مخروطی، خط مماس خطی است که با منحنی تماس داشته و منحنی در یک طرف آن واقع است، و

www.ketab.ir

این تعریف توسط یونانیان مورد استفاده قرار می‌گرفت، اما برای بسیاری از منحنی‌های پیچیده‌ای که در قرن هفدهم مورد استفاده قرار می‌گرفت، این تعریف ناکافی بود. یونانیان می‌دانستند که چگونه خط مماس به دایره را به‌دست‌آورند، برای این منظور خطی عمود بر شعاع دایره را در نظر می‌گرفتند. در حساب دیفرانسیل و انتگرال، نشان داده می‌شود که چگونه می‌توان خط مماس بر هر منحنی دلخواه را با محاسبه مشتق به‌دست‌آورد.

مسئله سوم در ریاضیات قرن هفدهم، یافتن مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع بود. در شلیک گلوله توپ، فاصله افقی طی‌شده وابسته به زاویه‌ای است که توپ روی زمین قرار دارد. یکی از مسایل کاربردی در آن زمان، یافتن زاویه شلیکی بود که ماکزیمم بُرد را نتیجه دهد. در اوایل قرن هفدهم، گالیله توانست بُرد ماکزیمم در خلأ را برای زاویه آتش °۴۵ تعیین کند. او همچنین توانست ارتفاع ماکزیمم برای پرتابه‌ها در زاویه‌های مختلف نسبت به سطح افق را به‌دست‌آورد. مطالعه حرکت سیارات نیز مبتنی بر تعیین ماکزیمم و مینیمم است، یافتن دورترین و نزدیک‌ترین فاصله یک سیاره از خورشید جزء مسایل مطرح‌شده در آن زمان بود.

مسئله چهارم مورد نظر دانشمندان در این قرن، یافتن طول یک منحنی مانند مسافت طی‌شده توسط یک سیاره در بازه زمانی مشخص، یافتن مساحت‌های محصورشده توسط منحنی‌ها، تعیین حجم‌های محدودشده توسط رویه‌ها، به‌دست‌آوردن مراکز گرانش (جرم و ثقل) جسم‌ها و نیروی جاذبه وارده از یک جسم به جسم دیگر بود. در سه قرن پیش از میلاد، ارشمیدس روشی با نام روش اشباع را برای محاسبه مساحت‌ها و حجم‌ها ابداع نموده بود. با این‌وجود واقعیت که ریاضیدانان یونانی برای محاسبه مساحت‌ها و حجم‌ها روش‌های نسبتاً ساده‌ای را مورد استفاده قرار می‌دادند، این روش‌ها دارای عمومیت کمتری بودند و اغلب به جواب‌های عددی منجر نمی‌شدند. علاوه بر این طول، مساحت، حجم و مرکز جرم با توجه به روش‌های اشباع ارشمیدس مجدداً مورد بازبینی قرار گرفت. روش اشباع ارشمیدس در ابتدا به صورتی تدریجی و سپس با کشف حساب دیفرانسیل و انتگرال با شدت بیشتری تغییر یافت. از روش اشباع برای محاسبه مساحت‌ها و حجم‌ها در جلد دوم کتاب استفاده خواهیم کرد.

تلاش ما در این کتاب آشنایی با کشف بسیار مهم و فوق‌العاده نیوتن و لایب‌نیتز و دیگر ریاضیدانان بزرگی است که مطالب ارائه‌شده آنها را دنبال کردند و باعث تحولی عظیم در دنیای علم شدند. در فصل پنجم از جلد اول کتاب خواهید دید که مفهوم پایه‌ای و بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال یعنی مشتق، بسیار ساده است، گرچه بیش از دو هزار سال طول کشید که دانشمندان به آن دست یابند. علاوه بر آن، متوجه خواهید شد که بسیاری از مسایل را می‌توان با ایده‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال حل کرد.

در جلد اول، ابتدا با اعداد حقیقی آشنا می‌شویم. تاریخچه توسیع اصل اعداد حقیقی به اواخر قرن نوزدهم برمی‌گردد. بعد از دهه هفتاد قرن نوزدهم وایراشتراوس، ددکیند و کانتور ریاضیدانی بودند که به طور مستقل ساختار اعداد حقیقی را معرفی کردند و باعث تحولی عظیم در مسیر پیشرفت ریاضیات شدند.

ایده اصلی دستگاه مختصات منسوب به دو ریاضیدان فرانسوی پیر فرما و رنه دکارت است. فرما حقوقدانی است که ریاضیات یکی از سرگرمی‌هایش محسوب می‌شد، و در سال ۱۶۲۹ در مقاله‌ای با استفاده از مختصات، نقاط و منحنی‌ها را توصیف نمود و هشت سال بعد از وی رنه دکارت فیلسوفی که اعتقاد داشت کلید اسرار جهان هستی در علم ریاضیات است، در سال ۱۶۳۷ در کتاب هندسه خود که بر اساس تکنیک‌های جبری برای حل مسائل هندسی نگاشته شده بود، اشاره‌ای به دستگاه مختصات داشت. لیکن با آنکه اعتبار اولیه دستگاه مختصات به پیر فرما می‌رسید، اما این دستگاه مختصات به نام دستگاه مختصات دکارتی معروف است.

هندسه تحلیلی و حساب دیفرانسیل و انتگرال، در طول تکامل تاریخی خود، بسیار بهم آمیخته شده‌اند.

www.ketab.ir

کشفیات جدید در یک موضوع به تغییراتی در دیگری می‌انجامید. هدف اصلی ما، مطرح کردن حساب دیفرانسیل و انتگرال است. بدین منظور، در این کتاب هر جا که لازم آید، مفاهیمی از هندسه تحلیلی مورد بحث قرار خواهند گرفت. لذا در این کتاب، برای درک بهتر مبانی حساب دیفرانسیل و انتگرال هر جا که لازم بوده چند مفهوم مقدماتی از هندسه تحلیلی نیز ارائه و مورد بحث قرار گرفته است. برای وسعت بخشیدن به گستره و کاربردهای حساب دیفرانسیل و انتگرال، مطالعه عمیق‌تری در هندسه تحلیلی لازم است و این مطالعه در فصول بعدی و در جلدهای سوم و چهارم، با استفاده از روش‌های برداری و روش‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال صورت خواهد گرفت.

در اکثر کتاب‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال، معرفی مختصات قطبی بعد از شناخت مباحث حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع یک‌متغیر مطرح می‌گردد. اما هدف از ارائه دستگاه مختصات، علاوه بر شناخت بهتر منحنی‌ها در صفحه، ارائه نوعی تفکر جدید در مطالعه منحنی‌ها است و لذا دستگاه مختصات قطبی و نمایش منحنی‌ها در این دستگاه را در جلد اول مطرح کرده‌ایم و بحث حساب دیفرانسیل و انتگرال در این دستگاه را به مرور در جلدهای دیگر کتاب آورده‌ایم.

مفهوم حد که در جلد اول به آن می‌پردازیم، نقش بسیار کلیدی و مهمی در حساب دیفرانسیل و انتگرال و ریاضیات مدرن دارد. به هر حال، گرچه تاریخ ریاضیات به سه هزار سال قبل برمی‌گردد، اما تا قرن نوزدهم که مفهوم حد توسط ریاضیدان بزرگ فرانسوی آگوستین لویی کوشی معرفی شد، مفهوم حساب دیفرانسیل و انتگرال به شکل امروزی آن درک نشده بود. در این کتاب، ابتدا با معرفی نماد حد به حل و بحث دو مسئله معرفی شده در قرن هفدهم می‌پردازیم. سپس با درک شهودی حد به سراغ تعریف رسمی آن رفته و با دیدن قضایایی برای محاسبه حدود و بررسی رفتار توابع، مفاهیم کلاسی مهم از توابع یعنی توابع پیوسته بحث حد را به پایان می‌بریم. همان گونه که در ساختار کتاب به صورت یک نمودار آمده است، مفاهیم حد و پیوستگی نقشی اساسی در تمام مباحث دارند.

هر دو مسئله ضریب زاویه خط مماس و سرعت لحظه‌ای یک ایده برای حل را دنبال می‌کنند. به طور مشابه، نرخ رشد یک ارگانیسم (بیولوژی)، سود کناره‌ای (اقتصاد)، چگالی جرم یک سیم (فیزیک) و میزان ماده غیرحلال (شیمی) و انواع دیگر نرخ تغییرات، دارای یک ایده و مفهوم اساسی می‌باشند که آن را **مشتق** می‌نامیم. این کلمه به همراه مفاهیم تابع و حد، کلیدهای اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال هستند.

در واقع دو کاربرد بسیار مهم از مشتق یعنی یافتن خطوط مماس به نمودار و سرعت یک جسم متحرک روی یک مسیر مستقیم، دو مسئله با یک الگوی حل می‌باشند. مشتق در بسیاری دیگر از وضعیت‌ها مفید است. برای نمونه، از مشتق برای تعبیر بزرگ‌نمایی استفاده می‌کنیم. کاربردهای دیگری از مشتق که از مفاهیم بسیار مهم و قوی است را در مطالب مختلف شرح می‌دهیم. اکثر کمیت‌هایی که در زندگی روزانه با آنها مواجه می‌شویم برحسب زمان تغییر می‌کنند. مخصوصاً این کمیت‌ها در بررسی‌های علمی مشاهده می‌شوند. برای مثال، یک شیمی‌دان علاقه‌مند است بداند که نرخ ناحلال بودن یک ماده در آب چقدر است. یک مهندس برق مایل است بداند میزان تغییر جریان در یک قسمت از مدار الکتریکی چه اندازه است. یک زیست‌شناس در ارتباط با نرخ صعود یا نزول باکتری خاصی در یک کشت، مطالعه می‌کند و به همین ترتیب می‌توان مثال‌های زیادی از دیگر حوزه‌های علوم طبیعی ارائه کرد. مطالعه ما به‌طور کلی روی چنین وضعیت‌هایی صورت می‌پذیرد.

در علوم، مهندسی و اقتصاد بیشتر به دنبال ماکزیمم و مینیمم مقدار توابع هستند. به عنوان مثال، یک شرکت معمولاً به دنبال ماکزیمم کردن سود و مینیمم کردن هزینه‌ها است. اگر به سوپر مارکت رفتید، این آزمایش

www.ketab.ir

را انجام دهید: با استفاده از یک خط کش کوچک ارتفاع و قطر همه قوطی‌هایی که شامل $300\ mm^3$ مواد غذایی هستند را اندازه‌گیری کنید. واقعیت این که تمام این قوطی‌ها حجم یکسان دارند یک موضوع تصادفی نیست، زیرا ابعاد خاصی وجود دارند که مثلاً آهن استفاده‌شده را مینیمم می‌کند و علاوه بر آن هزینه‌های ساخت را نیز برای شرکت تولیدکننده مینیمم می‌نماید. در روشی یکسان، بسیاری از اتومبیل‌هایی که به اقتصادی بودن معروف‌اند، ظاهر یکسانی دارند. این موضوع ساده‌ای نیست که یک کمپانی تولیدکننده اتومبیل از موفقیت کمپانی‌های دیگر تقلید کند. اما مهندسان برای یک حجم داده‌شده، به دنبال طرحی هستند که مقدار مواد به‌کار برده‌شده را به حداقل برسانند.

در رابطه با مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌توان به طور مبسوطی صحبت کرد، اما بهتر است که خواننده با صبر و شکیبایی مطالب را مطالعه کرده و سعی در حل تمرین‌های داده‌شده در انتهای هر فصل کند تا در پایان جلد چهارم به تبحر لازم برای فهم و درک مناسب‌تری از دیگر علوم در زمینه تخصصی خود برسد. به این خاطر و جهت یادگیری دقیق مباحث ریاضی عمومی که در دو نیمسال تحصیلی ابتدای دوره ارائه می‌شوند، کتاب حاضر را در چهار جلد آماده کرده‌ایم و تقسیم‌بندی مطالب به طریقی است که دو جلد اول و دوم مختص درس ریاضی عمومی ۱ و دو جلد سوم و چهارم مختص درس ریاضی عمومی ۲ می‌باشد. در تمام مباحث مثال‌های زیادی جهت تسلط خواننده به هر موضوع ارائه شده است. محور اصلی مطالب برای دانشجویان رشته‌های مهندسی و علوم پایه است، اما دیگر دانشجویان نیز می‌توانند از کتاب به‌خوبی استفاده کنند.

سال‌ها تجربه تدریس درس ریاضی ۱ و ریاضی ۲ در دانشگاه‌های مختلف توسط مؤلف برای دانشجویان رشته‌های مهندسی، فیزیک، شیمی و ... و با در نظر گرفتن سرفصل‌های مصوب این دروس، باعث گردید کتاب حاضر در چهار جلد مجزا و مستقل اما مرتبط با هم تدوین شود. در جلد اول حساب دیفرانسیل توابع یک‌متغیر برای آغاز بحث ریاضی عمومی و حساب دیفرانسیل و انتگرال آورده شده است که معمولاً نیمی از یک نیمسال تحصیلی را دربرمی‌گیرد و جلد دوم حساب انتگرال توابع یک‌متغیر و تکمیل درس ریاضی عمومی ۱ است. جلد سوم با عنوان حساب دیفرانسیل توابع چندمتغیر به نیمی از درس ریاضی ۲ اختصاص یافته است. مطالب تا حدودی بیشتر از سرفصل مصوب درس است و اساتید می‌توانند قسمت‌های اضافه را به صلاحدید خود حذف نمایند. در جلد چهارم بحث حساب انتگرال توابع چندمتغیر و آنالیز برداری آورده شده است. در این جلد نیز قسمت‌هایی اضافه بر سرفصل درس آورده شده و می‌توان آنها را برای مطالعهٔ آزاد دانشجویان در نظر گرفت. به نظر مؤلف کاربردهایی از آنالیز برداری آورده شده که با مطالعهٔ بسیاری از کتب تخصصی مکانیک، مقاومت، مکانیک سیالات و نظریهٔ الکترومغناطیس برای این رشته‌ها جمع‌آوری شده است، باعث ایجاد انگیزه در دانشجویان برای یادگیری عمیق‌تر درس ریاضی ۲ خواهد شد.

مؤلف بر خود لازم می‌داند که از دانشجویان مهندسی و علوم پایه دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی که مشوق در تألیف کتاب بوده‌اند تشکر و قدردانی نماید. از همکاران دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی که با سعه صدر خود و زحمات بی‌دریغشان در دروس ریاضی ۱ و ۲ باعث ایجاد انگیزه برای تألیف کتاب حاضر شده‌اند سپاسگزارم. از آقایان دکتر محمد مقدسی و دکتر حمید رزاقیان اناری که در آماده‌سازی کتاب و ویرایش متون آن زحمات زیادی کشیدند کمال تشکر را دارم. همچنین از خانم مهندس سوگند پروانه مسیحا بدلیل تخصیص وقت گرانبهایشان در حل مثال ها و ویرایش علمی تشکر می نمایم. از خانم مریم‌السادات عبادی که نسخه‌های دست‌نویس کتاب را مطالعه و نکات بسیار مفیدی را متذکر شدند نیز سپاسگزارم. مطمئناً در نگارش کتاب خطاهایی رخ داده است که از چشم نویسنده پوشیده‌اند، لذا از خوانندگان کتاب تقاضا می‌شود که در صورت مشاهده این خطاها اعم از تایپی، نگارشی و علمی مؤلف را آگاه نمایند و

www.ketab.ir

نظرات خود را به آدرس masiha@kntu.ac.ir جهت بازبینی در چاپ‌های بعد ارسال نمایند. در پایان از آقای دکتر مهدی علیاری و آقای حسن صالحی و دیگر همکاران ادارهٔ انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی که امکان چاپ کتاب حاضر را فراهم نمودند تشکر می‌نمایم.

سیّد هاشم پروانه مسیحا
دی ۱۳۹۷

www.ketab.ir

فهرست

پیش‌گفتار آ

آنچه در این کتاب می‌خوانید ز

۱ جبر بردارها ۱

۱.۱ اسکالرها و بردارها ۲

۲.۱ ضرب اسکالر در بردار ۳

۳.۱ جمع و تفاضل بردارها ۵

۴.۱ ضرب داخلی یا نقطه‌ای ۸

۵.۱ ضرب خارجی یا برداری ۱۵

۶.۱ ضرب سه‌تایی اسکالر ۲۰

۷.۱ ضرب سه‌تایی برداری ۲۵

۸.۱ پایه‌ها ۳۱

۹.۱ تمرین‌ها ۳۴

۲ بردارها در دستگاه مختصات دکارتی ۳۷

۱.۲ جبر بردارها ۳۸

۲.۲ وابستگی خطی و استقلال خطی ۴۴

۱.۲.۲ بردارهای پایه و بردارهای موقعیت ۴۸

۳.۲ ضرب داخلی ۵۲

۴.۲ مشخصه تحلیلی بردارها ۵۸

۵.۲ پایه‌ها ۶۳

۱.۵.۲ پایه‌های متعامد ۶۳

۲.۵.۲ پایه‌های جهت‌دار ۶۶

۶.۲ ضرب برداری یا خارجی ۶۸

۷.۲ حاصل‌ضرب‌های سه‌تایی و اتحادهای برداری ۷۶

۱.۷.۲ حاصل‌ضرب‌های سه‌تایی اسکالر ۷۶

www.ketab.ir

۲.۷.۲ حاصل‌ضرب سه‌تایی برداری ۷۹
۳.۷.۲ پایه‌های متقابلاً دو طرفه ۸۴
۸.۲ قضیه‌ها با اثبات ۹۰
۹.۲ تمرین‌ها ۹۸

۳ کاربردهایی از بردارها در هندسه **۱۰۳**
۱.۳ کاربرد روش‌های برداری در هندسه مقدماتی ۱۰۳
۱.۱.۳ روش نمایش ۱۰۳
۲.۳ معادله برداری خط مستقیم ۱۰۸
۱.۲.۳ فرمول‌های فاصله ۱۱۷
۱.۳ صفحه ۱۲۱
۴.۰ استوانه‌ها و کره‌ها ۱۳۲
۱.۴.۳ استوانه‌ها ۱۳۲
۱.۴.۳ ۱۳۴
۵.۳ مقاطع استوانه‌ای و کروی ۱۳۸
۶.۳ تمرین‌ها ۱۴۷

۴ توابع برداری از متغیر حقیقی **۱۴۹**
۱.۴ توابع برداری ۱۴۹
۱.۱.۴ همسایگی‌ها ۱۴۹
۲.۱.۴ توابع برداری ۱۵۲
۳.۱.۴ توابع کراندار ۱۵۴
۴.۱.۴ جبر توابع برداری ۱۵۶
۲.۴ حد توابع برداری ۱۵۸
۳.۴ پیوستگی ۱۶۵
۴.۴ مشتق ۱۷۰
۱.۴.۴ مشتق تابع برداری ۱۷۰
۲.۴.۴ قوانین مشتق توابع برداری ۱۷۳
۵.۴ انتگرال ۱۸۰
۶.۴ توابع از کلاس $\mathcal{C}^m$ ۱۸۲
۱.۶.۴ فرمول تیلور ۱۸۳
۲.۶.۴ توابع تحلیلی ۱۸۸
۷.۴ منحنی‌ها در فضا ۱۸۹
۱.۷.۴ نمایش منحنی‌های فضایی ۱۸۹
۲.۷.۴ نمایش‌های منظم منحنی‌ها در فضا ۱۹۰
۳.۷.۴ منحنی‌های منظم ۱۹۴
۴.۷.۴ تصویرهای متعامد ۲۰۱

www.ketab.ir

۵.۷.۴ نمایش‌های ضمنی منحنی‌ها ۲۰۲
۶.۷.۴ منحنی‌های منظم از کلاس C^m ۲۰۳
۸.۴ طول قوس ۲۰۵
۱.۸.۴ طول قوس به عنوان یک پارامتر ۲۱۱
۹.۴ مبانی هندسه دیفرانسیل ۲۱۴
۱.۹.۴ بردار یکه مماس ۲۱۴
۲.۹.۴ خط مماس و صفحه قائم ۲۱۵
۳.۹.۴ انحنا ۲۱۹
۴.۹.۴ بردار یکه قائم اصلی ۲۲۵
۵.۹.۴ خط قائم اصلی و صفحه بوسان ۲۲۷
۶.۹.۴ قائم دوم و کنج متحرک ۲۳۰
۷.۹.۴ تاب یا انحنای دوم ۲۳۳
۸.۹.۴ نشانگرهای کروی ۲۴۱
۹.۹.۴ معادلات فرنه-سرِت ۲۴۴
۱۰.۴ قضیه‌ها با اثبات ۲۴۵
۱۱.۴ تمرین‌ها ۲۵۹

۵ توابع برداری از متغیر برداری ۲۶۵
۱.۵ توابع دو و سه متغیره ۲۶۵
۱.۱.۵ توابع از دو متغیر ۲۶۶
۲.۱.۵ توابع از سه متغیر ۲۸۲
۳.۱.۵ حد و پیوستگی توابع دومتغیره ۲۸۵
۴.۱.۵ رسم رویه‌ها: روش مقاطع ۲۹۸
۵.۱.۵ رویه‌های درجه دوم ۳۰۲
۶.۱.۵ رویه‌های دوار ۳۱۲
۲.۵ مشتقات جزیی توابع دو و سه متغیره ۳۱۹
۳.۵ نموها و دیفرانسیل‌ها ۳۳۱
۴.۵ قانون زنجیره‌ای ۳۳۸
۵.۵ مشتق‌گیری ضمنی و مشتقات جزیی ۳۵۰
۶.۵ مشتقات سویی (جهتی) ۳۵۴
۷.۵ صفحات مماس و خطوط قائم به رویه ۳۶۲
۸.۵ حساب دیفرانسیل توابع برداری ۳۷۳
۱.۸.۵ توابع برداری ۳۷۴
۲.۸.۵ توابع خطی ۳۷۶
۳.۸.۵ حد و پیوستگی توابع برداری ۳۸۳
۴.۸.۵ مشتق‌پذیری توابع برداری ۳۸۹

www.ketab.ir

۹.۵ ماکزیمم و مینیمم توابع دو متغیره ۴۰۶
۱۰.۵ تکثیرکن‌های لاگرانژ و اکسترمم‌های مقید ۴۱۹
۱۱.۵ قضیه‌ها با اثبات ۴۲۹
۱۲.۵ تمرین‌ها ۴۴۹

آ مبانی توپولوژیک فضاهای اقلیدسی ۴۶۱
آ.۱ مجموعه‌های باز و بسته ۴۶۱
آ.۲ مجموعه‌های همبند ۴۶۸
آ.۳ مجموعه‌های فشرده ۴۷۳
آ.۴ توابع پیوسته ۴۷۵
آ.۵ تمرین‌ها ۴۸۳

منابع ۴۸۵

نمایه ۴۸۷

www.ketab.ir