www.a-pdf.com ©®

ریاضی عمومی ۱

جلد دوم: حساب انتگرال توابع یک‌متغیر

مؤلف:

سید هاشم پروانه مسیحا

www.ketab.ir

www.a-pdf.com ©®

شماره ۴۶۱

سرشناسه: پروانه مسیحا، سیّدهاشم، ۱۳۴۰-
عنوان و نام پدیدآور: ریاضی عمومی ۱ / مولف سیّدهاشم پروانه‌مسیحا.
مشخّصات نشر: تهران: دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدّین طوسی، انتشارات،۱۳۹۷.
مشخّصات ظاهری: ۸۶۷ص.: مصور ،جدول ،نمودار.
شابک: دوره 978-622-6029-23-0 : ؛ ج، 978-622-6029-24-7 :۱ ؛ ج، 978-622-6029-25-4 : ۲
وضعیّت فهرست نویسی: فیپا
یادداشت: کتابنامه
مندرجات: ج.۱ .حساب دیفرانسیل توابع یک متغیّر.- ج.۲. حساب انتگرال توابع یک متغیّر.
موضوع: ریاضیات -راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع: ریاضیّات - مسایل، مرین‌ها و غیره (عالی)
رده بندی کنگره: ۱۳۹۷ ۴ ۱ Q ۷/۲/
رده بندی دیویی: ۵۱۰/۷۶
شماره کتابشناسی ملّی: ۵۴۱۳۰۱۲

ناشر: دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدّین طوسی press.kntu.ac.ir

عنوان: ریاضی عمومی ۱ (جلد دوّم: حساب انتگرال توابع یک متغیّر)
مؤلّف: دکتر سیّد هاشم پروانه مسیحا
نوبت چاپ: اوّل
تاریخ انتشار: آبان ۱۳۹۷
شمارگان: ۵۰۰ جلد
چاپ: شریف
صحّافی: خیام
قیمت: ۱۲۰۰۰۰ تومان

تمام حقوق برای ناشر محفوظ است

خیابان میرداماد غربی-شماره ۴۷۰- انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدّین طوسی - تلفن: ۸۸۸۸۱۰۵۲
میدان ونک - خیابان ولی‌عصر(عج) - بالاتر از چهارراه میرداماد - شماره ۲۶۲۶- مرکز پخش و فروش انتشارات
تلفن: ۸۸۷۷۲۲۷۷ رایانامه: press@kntu.ac.ir - تارنما (فروش برخط): press.kntu.ac.ir

www.ketab.ir

www.a-pdf.com ©®

پیش‌گفتار

به‌طور یقین، بزرگترین کشف در ریاضیات عهد باستان، هندسه اقلیدسی بوده است و پس از کشف حساب دیفرانسیل و انتگرال، کمتر بیش از دو هزار سال بعد، اهمیت هندسه اقلیدسی نمود بیشتری پیدا کرد. حساب دیفرانسیل و انتگرال به طور مستقل در قرن هفدهم توسط ایزاک نیوتن در انگلستان و گوتفرید ویلیام لایب‌نیتز در آلمان پایه‌گذاری شد. با اینکه پاسخ بسیاری از مسایل توسط ایرانیان و یونانیان تا حدودی به‌دست آمده بود، اما مباحث حساب دیفرانسیل و انتگرال در درجه اول اهمیت برای رفع مشکلات علمی مطرح‌شده در قرن هفدهم عنوان شدند.

به‌طور عام چهار مسئله در سیر تکاملی حساب دیفرانسیل و انتگرال مورد توجه خاص بوده است. اولین مسئله، یافتن سرعت و شتاب جسم متحرک با دانستن رابطه‌ای برای مسافت طی‌شده به عنوان تابعی از زمان است و برعکس، چگونگی یافتن سرعت و مسافت طی‌شده با دانستن شتاب جسم متحرک به عنوان تابعی از زمان، مورد نظر است. این مسئله درحوزه مطالعات حرکت مطرح بوده و مشکلی که دانشمندان در قرن هفدهم با آن مواجه بودند یافتن و محاسبه سرعت و شتاب جسم متحرک در لحظه‌ای به لحظه دیگر بود.

دو مسئله‌ای که اینجا مطرح می‌شود یکی تعریف دقیق سرعت لحظه‌ای و دیگری شیوهٔ محاسبه آن است و هر دوی این سؤالات را می‌توان با استفاده از مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال پاسخ داد. برعکس، یافتن مسافت طی‌شده با دانستن سرعت نیز دارای همین مشکلات است. نمی‌توان سرعت در هر لحظه را در زمان ضرب کرد تا مسافت طی‌شده را به‌دست آورد زیرا سرعت لحظه‌به‌لحظه متفاوت است. در حساب دیفرانسیل و انتگرال، روش محاسبه سرعت لحظه‌ای ارائه می‌شود که توسط نیوتن کشف شده است. علاوه بر آن، چگونگی یافتن مسافت طی‌شده با داشتن تابع سرعت به‌دست می‌آید.

دومین مسئله مطرح‌شده در قرن هفدهم، یافتن خط مماس به یک منحنی بود. علاقه به حل این مسئله ناشی از چند خواسته است. با آن که مسئله مماس‌ها هندسی است، اما کاربردهایی در علوم دیگر از جمله طراحی لنزها و عدسی‌ها و به‌طور عام در مباحث اُپتیک دارد که شدیداً مورد توجه فرما، هویگنس، نیوتن و دیگر دانشمندان آن زمان بود. برای مطالعه عبور نور از یک لنز، نیاز به دانستن زاویه برخورد پرتو نور به لنز بود تا بتوان از قانون انکسار استفاده کرد و در اینجا است که مسئله یافتن خط مماس مطرح می‌شود.

مسئله دیگری که نیاز به دانستن مماس داشت، مطالعه حرکت یک جسم متحرک در هر نقطه از مسیر حرکت بود. برای بررسی حرکت یک جسم متحرک در هر نقطه از مسیر حرکت، جهت مماس به مسیر در آن نقطه مورد نیاز است. لذا، مفهوم خط مماس بسیار گسترده‌تر از مفهومی است که در هندسه بیان می‌شود. در مقاطع مخروطی، خط مماس خطی است که با منحنی تماس داشته و منحنی در یک طرف آن واقع است، و

www.ketab.ir

www.a-pdf.com ©®

این تعریف توسط یونانیان مورد استفاده قرار می‌گرفت، اما برای بسیاری از منحنی‌های پیچیده‌ای که در قرن هفدهم مورد استفاده قرار می‌گرفت، این تعریف ناکافی بود. یونانیان می‌دانستند که چگونه خط مماس به دایره را به‌دست‌آورند، برای این منظور خطی عمود بر شعاع دایره را در نظر می‌گرفتند. در حساب دیفرانسیل و انتگرال، نشان داده می‌شود که چگونه می‌توان خط مماس بر هر منحنی دلخواه را با محاسبه مشتق به‌دست‌آورد.

مسئله سوم در ریاضیات قرن هفدهم، یافتن مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع بود. در شلیک گلوله توپ، فاصله افقی طی‌شده وابسته به زاویه‌ای است که توپ روی زمین قرار دارد. یکی از مسایل کاربردی در آن زمان، یافتن زاویه شلیکی بود که ماکزیمم بُرد را نتیجه دهد. در اوایل قرن هفدهم، گالیله توانست بُرد ماکزیمم در خلأ را برای زاویه آتش ۴۵° تعیین کند. او همچنین توانست ارتفاع ماکزیمم برای پرتابه‌ها در زاویه‌های مختلف نسبت به سطح افق را به‌دست‌آورد. مطالعه حرکت سیارات نیز مبتنی بر تعیین ماکزیمم و مینیمم است، یعنی دورترین و نزدیک‌ترین فاصله یک سیاره از خورشید جزء مسایل مطرح‌شده در آن زمان بود.

مسئله چهارم مورد نظر دانشمندان در این قرن، یافتن طول یک منحنی مانند مسافت طی‌شده توسط یک سیاره در دوره زمانی مشخص، یافتن مساحت‌های محصورشده توسط منحنی‌ها، تعیین حجم‌های محدودشده توسط رویه‌ها، به‌دست‌آوردن مراکز گرانش (جرم و ثقل) جسم‌ها و نیروی جاذبه وارده از یک جسم به جسم دیگر بود. در سه قرن بیش از میلاد، ارشمیدس روشی با نام روش اشباع را برای محاسبه مساحت‌ها و حجم‌ها ابداع نموده بود. علی‌رغم این واقعیت که ریاضیدانان یونانی برای محاسبه مساحت‌ها و حجم‌ها روش‌های نسبتاً ساده‌ای را مورد استفاده قرار می‌دادند، این روش‌ها دارای عمومیت کمتری بودند و اغلب به جواب‌های عددی منجر نمی‌شدند. علاقه به یافتن طول مسافت، حجم و مرکز جرم با توجه به روش‌های اشباع ارشمیدس مجدداً مورد بازبینی قرار گرفت. روش اشباع ارشمیدس در ابتدا به صورتی تدریجی و سپس با کشف حساب دیفرانسیل و انتگرال با شدت بیشتری تغییر یافت. از روش اشباع برای محاسبه مساحت‌ها و حجم‌ها در جلد دوم کتاب استفاده خواهیم کرد.

تلاش ما در این کتاب آشنایی با کشف بسیار مهم و نوآورانه نیوتن و لایب‌نیتز و دیگر ریاضیدانان بزرگی است که مطالب ارائه‌شده آنها را دنبال کردند و باعث تحولی عظیم در دنیای علم شدند. در فصل پنجم از جلد اول کتاب خواهید دید که مفهوم پایه‌ای و بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال یعنی مشتق، بسیار ساده است، گرچه بیش از دو هزار سال طول کشید که دانشمندان به آن دست یابند. علاوه بر آن، متوجه خواهید شد که بسیاری از مسایل را می‌توان با ایده‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال حل کرد.

در جلد اول، ابتدا با اعداد حقیقی آشنا می‌شویم. تاریخچه توسیع اصولی اعداد حقیقی به اواخر قرن نوزدهم برمی‌گردد. بعد از دهه هفتاد قرن نوزدهم وایراشتراوس، ددکیند و کانتور ریاضیدانانی بودند که به طور مستقل ساختار اعداد حقیقی را معرفی کردند و باعث تحولی عظیم در مسیر پیشرفت ریاضیات شدند.

ایده اصلی دستگاه مختصات منسوب به دو ریاضیدان فرانسوی پیر فرما و رنه دکارت است. فرما حقوقدانی است که ریاضیات یکی از سرگرمی‌هایش محسوب می‌شد، و در سال ۱۶۲۹ در مقاله‌ای با استفاده از مختصات، نقاط و منحنی‌ها را توصیف نمود و هشت سال بعد از وی رنه دکارت فیلسوفی که اعتقاد داشت کلید اسرار جهان هستی در علم ریاضیات است، در سال ۱۶۳۷ در کتاب هندسه خود که بر اساس تکنیک‌های جبری برای حل مسائل هندسی نگاشته شده بود، اشاره‌ای به دستگاه مختصات داشت. لیکن با آنکه اعتبار اولیه دستگاه مختصات به پیر فرما می‌رسید، اما این دستگاه مختصات به نام دستگاه مختصات دکارتی معروف است.

هندسه تحلیلی و حساب دیفرانسیل و انتگرال، در طول تکامل تاریخی خود، بسیار بهم آمیخته شده‌اند.

www.ketab.ir

www.a-pdf.com ©®

کشفیات جدید در یک موضوع به تغییراتی در دیگری می‌انجامید. هدف اصلی ما، مطرح کردن حساب دیفرانسیل و انتگرال است. بدین منظور، در این کتاب هر جا که لازم آید، مفاهیمی از هندسه تحلیلی مورد بحث قرار خواهند گرفت. لذا در این کتاب، برای درک بهتر مبانی حساب دیفرانسیل و انتگرال هر جا که لازم بوده چند مفهوم مقدماتی از هندسه تحلیلی نیز ارائه و مورد بحث قرار گرفته است. برای وسعت بخشیدن به گستره و کاربردهای حساب دیفرانسیل و انتگرال، مطالعه عمیق‌تری در هندسه تحلیلی لازم است و این مطالعه در فصول بعدی و در جلدهای سوم و چهارم، با استفاده از روش‌های برداری و روش‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال صورت خواهد گرفت.

در اکثر کتاب‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال، معرفی مختصات قطبی بعد از شناخت مباحث حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع یک‌متغیر مطرح می‌گردد. اما هدف از ارائه دستگاه مختصات، علاوه بر شناخت بهتر منحنی‌ها در صفحه، ارائه نوعی تفکر جدید در مطالعه منحنی‌ها است و لذا دستگاه مختصات قطبی و نمایش منحنی‌ها در این دستگاه را در جلد اول مطرح کرده‌ایم و بحث حساب دیفرانسیل و انتگرال در این دستگاه را به‌مرور در جاهای دیگر کتاب آورده‌ایم.

مفهوم حد که در جلد اول به آن می‌پردازیم، نقش بسیار کلیدی و مهمی در حساب دیفرانسیل و انتگرال و ریاضیات مدرن دارد. به هر حال، در حدود تاریخ ریاضیات به سه هزار سال قبل برمی‌گردد، اما تا قرن نوزدهم که مفهوم حد توسط ریاضیدان بزرگ فرانسوی آگوستین لویی کوشی معرفی شد، مفهوم حساب دیفرانسیل و انتگرال به شکل امروزی آن درک نشده بود. در این کتاب، ابتدا با معرفی نماد حد به حل و بحث دو مسئله معرفی شده در قرن هفدهم می‌پردازیم. سپس با درک شهودی حد به سراغ تعریف رسمی آن رفته و با دیدن قضایایی برای محاسبه حدود و بررسی رفتار توابع، با معرفی کلاسی مهم از توابع یعنی توابع پیوسته بحث حد را به پایان می‌بریم. همان گونه که در ساختار کتاب به صورت یک نمودار آمده است، مفاهیم حد و پیوستگی نقشی اساسی در تمام مباحث دارند.

هر دو مسئله ضریب زاویه خط مماس و سرعت لحظه‌ای یک جسم، به حد برای حل را دنبال می‌کنند. به طور مشابه، نرخ رشد یک ارگانیسم (بیولوژی)، سود کناره‌ای (اقتصاد)، چگالی جرم یک سیم (فیزیک) و میزان ماده غیرحلال (شیمی) و انواع دیگر نرخ تغییرات، دارای یک ایده و مفهوم اساسی می‌باشند که آن را **مشتق** می‌نامیم. این کلمه به همراه مفاهیم تابع و حد، کلیدهای اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال هستند.

در واقع دو کاربرد بسیار مهم از مشتق یعنی یافتن خطوط مماس به نمودارها و سرعت یک جسم متحرک روی یک مسیر مستقیم، دو مسئله با یک الگوی حل می‌باشند. مشتق در بسیاری دیگر از وضعیت‌ها مفید است. برای نمونه، از مشتق برای تعبیر بزرگ‌نمایی استفاده می‌کنیم. کاربردهای دیگری از مشتق که از مفاهیم بسیار مهم و قوی است را در مطالب مختلف شرح می‌دهیم. اکثر کمیت‌هایی که در زندگی روزانه با آنها مواجه می‌شویم برحسب زمان تغییر می‌کنند. مخصوصاً این کمیت‌ها در بررسی‌های علمی مشاهده می‌شوند. برای مثال، یک شیمی‌دان علاقه‌مند است بداند که نرخ ناحلال بودن یک ماده در آب چقدر است. یک مهندس برق مایل است بداند میزان تغییر جریان در یک قسمت از مدار الکتریکی چه اندازه است. یک زیست‌شناس در ارتباط با نرخ صعود یا نزول باکتری خاصی در یک کشت، مطالعه می‌کند و به همین ترتیب می‌توان مثال‌های زیادی از دیگر حوزه‌های علوم طبیعی ارائه کرد. مطالعه ما به‌طور کلی روی چنین وضعیت‌هایی صورت می‌پذیرد.

در علوم، مهندسی و اقتصاد بیشتر به دنبال ماکزیمم و مینیمم مقدار توابع هستند. به عنوان مثال، یک شرکت معمولاً به دنبال ماکزیمم کردن سود و مینیمم کردن هزینه‌ها است. اگر به سوپر مارکت رفتید، این آزمایش

www.ketab.ir

www.a-pdf.com ©®

را انجام دهید: با استفاده از یک خط کش کوچک ارتفاع و قطر همه قوطی‌هایی که شامل $300\ mm^3$ مواد غذایی هستند را اندازه‌گیری کنید. واقعیت این که تمام این قوطی‌ها حجم یکسان دارند یک موضوع تصادفی نیست، زیرا ابعاد خاصی وجود دارند که مثلاً آهن استفاده‌شده را مینیمم می‌کند و علاوه بر آن هزینه‌های ساخت را نیز برای شرکت تولیدکننده مینیمم می‌نماید. در روشی یکسان، بسیاری از اتومبیل‌هایی که به اقتصادی بودن معروف‌اند، ظاهر یکسانی دارند. این موضوع ساده‌ای نیست که یک کمپانی تولیدکننده اتومبیل از موفقیت کمپانی‌های دیگر تقلید کند. اما مهندسان برای یک حجم داده‌شده، به دنبال طرحی هستند که مقدار مواد به‌کار برده‌شده را به حداقل برسانند.

در رابطه با مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌توان به طور مبسوطی صحبت کرد، اما بهتر است که خوانند با صبر و شکیبایی مطالب را مطالعه کرده و سعی در حل تمرین‌های داده‌شده در انتهای هر فصل کند تا در پایان جلد چهارم به تبحر لازم برای فهم و درک مناسب‌تری از دیگر علوم در زمینه تخصصی خود برسد. به این خاطر و جهت یادگیری دقیق مباحث ریاضی عمومی که در دو نیمسال تحصیلی ابتدای دوره ارائه می‌شوند، کتاب حاضر را در چهار جلد آماده کرده‌ایم و تقسیم‌بندی مطالب به طریقی است که دو جلد اول و دوم مختص درس ریاضی عمومی ۱ و دو جلد سوم و چهارم مختص درس ریاضی عمومی ۲ می‌باشد. در تمام مباحث مثال‌های زیادی جهت بسط و گسترش ارائه به هر موضوع ارائه شده است. محور اصلی مطالب برای دانشجویان رشته‌های مهندسی و علوم پایه است اما دیگر دانشجویان نیز می‌توانند از کتاب به‌خوبی استفاده کنند.

سال‌ها تجربه تدریس دروس ریاضی ۱ و ریاضی ۲ در دانشگاه‌های مختلف توسط مؤلف برای دانشجویان رشته‌های مهندسی، فیزیک، شیمی، ریاضی و آمار در نظر گرفتن سرفصل‌های مصوب این دروس، باعث گردید کتاب حاضر در چهار جلد مجزا و مستقل اما در ارتباط با هم تدوین شود. در جلد اول حساب دیفرانسیل توابع یک‌متغیر برای آغاز بحث ریاضی عمومی و حساب دیفرانسیل و انتگرال آورده شده است که معمولاً نیمی از یک نیمسال تحصیلی را دربرمی‌گیرد و جلد دوم حساب انتگرال توابع یک‌متغیر و تکمیل درس ریاضی عمومی ۱ است. جلد سوم با عنوان حساب دیفرانسیل توابع چندمتغیر به نیمی از درس ریاضی ۲ اختصاص یافته است. مطالب تا حدودی بیشتر از سرفصل مصوب درس است اما مدرسان می‌توانند قسمت‌های اضافه را به صلاحدید خود حذف نمایند. در جلد چهارم بحث حساب انتگرال توابع چندمتغیر و آنالیز برداری آورده شده است. در این جلد نیز قسمت‌هایی اضافه بر سرفصل درس آورده شده و می‌توان آنها را برای مطالعهٔ آزاد دانشجویان در نظر گرفت. به نظر مؤلف کاربردهایی از آنالیز برداری در جلد چهارم که با مطالعهٔ بسیاری از کتب تخصصی مکانیک، مقاومت، مکانیک سیالات و نظریهٔ الکترومغناطیس برای این رشته‌ها جمع‌آوری شده است، باعث ایجاد انگیزه در دانشجویان برای یادگیری عمیق‌تر درس ریاضی ۲ خواهد شد.

مؤلف بر خود لازم می‌داند که از دانشجویان مهندسی و علوم پایه دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی که مشوق در تألیف کتاب بوده‌اند تشکر و قدردانی نماید. از همکاران دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی که با سعه صدر خود و زحمات بی‌دریغ‌شان در دروس ریاضی ۱ و ۲ باعث ایجاد انگیزه برای تألیف کتاب حاضر شده‌اند سپاسگزارم. از آقایان دکتر محمد مقدسی و دکتر حمید رزاقیان اناری که در آماده‌سازی کتاب و ویرایش متون آن زحمات زیادی کشیدند کمال تشکر را دارم. همچنین از خانم مهندس سوگند پروانه مسیحا بدلیل تخصیص وقت گرانبهایشان در حل مثال ها و ویرایش علمی تشکر می نمایم. از خانم مریم‌السادات عبادی که نسخه‌های دست‌نویس کتاب را مطالعه و نکات بسیار مفیدی را متذکر شدند نیز سپاسگزارم. مطمئناً در نگارش کتاب خطاهایی رخ داده است که از چشم نویسنده پوشیده‌اند، لذا از خوانندگان کتاب تقاضا می‌شود که در صورت مشاهده این خطاها اعم از تایپی، نگارشی و علمی مؤلف را آگاه نمایند و

www.ketab.ir

www.a-pdf.com ©®

نظرات خود را به آدرس masiha@kntu.ac.ir جهت بازبینی در چاپ‌های بعد ارسال نمایند. در پایان از آقای دکتر مهدی علیاری و آقای حسن صالحی و دیگر همکاران ادارهٔ انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی که امکان چاپ کتاب حاضر را فراهم نمودند تشکر می نمایم.

سید هاشم پروانه مسیحا
دانشکده ریاضی
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
email: masiha@kntu.ac.ir
شهریور ۱۳۸۷

www.ketab.ir

www.a-pdf.com ©®

فهرست

پیش‌گفتار آ

آنچه در این کتاب می‌خوانید ز

۱ مفاهیم حساب انتگرال ۱

۱.۱ سیر تاریخی حساب انتگرال ۱

۲.۱ پادیفرانسیل ۲

۳.۱ مجموع‌ها و نمادجمع‌بندی ۹

۱.۳.۱ برخی جمع‌های خاص ۱۳

۴.۱ انتگرال معین ۱۵

۱.۴.۱ مقدمه‌ای برای مساحت ۱۶

۲.۴.۱ تعریف انتگرال معین ۳۳

۵.۱ خواص انتگرال معین ۴۴

۶.۱ قضیه اساسی حساب انتگرال ۵۲

۷.۱ انتگرال نامعین و تغییر متغیر ۶۰

۸.۱ انتگرال توابع مثلثاتی ۷۷

۹.۱ انتگرال‌گیری تقریبی ۸۴

۱.۹.۱ روش ذوزنقه ۸۶

۲.۹.۱ روش سیمپسون ۹۰

۳.۹.۱ روش نقطهٔ میانی ۹۵

۱۰.۱ قضیه‌ها با اثبات ۹۷

۱۱.۱ تمرین‌ها ۱۱۱

۲ کاربردهای انتگرال ۱۲۵

۱.۲ مساحت محصور به نمودار ۱۲۵

۱.۱.۲ مساحت در فرم پارامتری ۱۴۸

۲.۱.۲ مساحت در مختصات قطبی ۱۵۰

www.ketab.ir

www.a-pdf.com ©®

۲.۲ حجم جسم دوار ۱۵۹
۱.۲.۲ حجم جسم دوران یافته، روش قرص ۱۶۰
۲.۲.۲ حجم جسم دوران یافته، روش واشر (حلقه) ۱۷۰
۳.۲.۲ دوران حول یک خط ۱۷۸
۴.۲.۲ حجم جسم دوران یافته، روش پوسته استوانه‌ای ۱۸۲
۳.۲ حجم به وسیله برش‌ها ۱۹۳
۴.۲ طول قوس ۲۰۰
۱.۴.۲ تابع طول قوس ۲۰۵
۲.۴.۲ طول قوس در فرم پارامتری ۲۱۰
۳.۴.۲ طول قوس در مختصات قطبی ۲۱۳
۵.۲ مساحت رویه دوران یافته ۲۱۵
۱.۵.۲ مساحت رویه دوران یافته حول محور yها ۲۲۰
۲.۵.۲ مساحت رویه دوار در فرم پارامتری ۲۲۱
۳.۵.۲ مساحت رویه دوار در مختصات قطبی ۲۲۴
۶.۲ مقدار متوسط و قضیه مقدار میانگین ۲۲۶
۷.۲ حرکت مستقیم‌الخط ۲۳۰
۸.۲ کار ۲۳۲
۱.۸.۲ بررسی فنر ۲۳۵
۲.۸.۲ محاسبه کار در مسائل پمپاژ ۲۴۰
۹.۲ نیروی وارده توسط یک سیال ۲۴۹
۱۰.۲ گشتاورها و مرکز جرم ناحیه‌های مسطح ۲۵۳
۱۱.۲ برخی کاربردهای دیگر ۲۶۲
۱۲.۲ تمرین‌ها ۲۷۱

۳ توابع متعالی (غیرجبری) **۲۹۳**
۱.۳ توابع معکوس ۲۹۳
۱.۱.۳ پیوستگی تابع معکوس ۳۰۱
۲.۱.۳ مشتق‌پذیری تابع معکوس ۳۰۲
۲.۳ تابع لگاریتم طبیعی ۳۰۵
۱.۲.۳ قوانین لگاریتم طبیعی ۳۱۲
۲.۲.۳ مشتق‌پذیری تابع لگاریتم طبیعی ۳۱۴
۳.۳ تابع نمایی ۳۲۲
۱.۳.۳ مشتق تابع نمایی طبیعی ۳۲۵
۴.۳ انتگرال‌هایی بر حسب توابع لگاریتم و نمایی طبیعی ۳۳۷
۵.۳ توابع نمایی و لگاریتمی در حالت کلی ۳۵۷
۱.۵.۳ مشتق تابع نمایی ۳۵۸

www.ketab.ir

www.a-pdf.com ©®

۲.۵.۳ تابع لگاریتمی با پایه a ۳۶۵
۶.۳ مشتق‌گیری لگاریتمی ۳۶۹
۷.۳ قوانین رشد و اُفول ۳۷۲
۱.۷.۳ سود مرکب ۳۷۹
۸.۳ توابع معکوس مثلثاتی ۳۸۰
۱.۸.۳ تابع معکوس سینوس ۳۸۱
۲.۸.۳ تابع معکوس کسینوس ۳۸۳
۳.۸.۳ تابع معکوس تانژانت ۳۸۵
۴.۸.۳ تابع معکوس سکانت ۳۸۶
۵.۸.۳ مشتق توابع معکوس مثلثاتی ۳۹۱
۶.۸.۳ انتگرال‌هایی شامل توابع معکوس مثلثاتی ۳۹۷
۷.۸.۳ انتگرال توابع گویا ۴۰۰
۸.۸.۳ تکامل مربعات ۴۰۲
۹.۳ توابع هذلولوی (هیپربولیک) ۴۰۷
۱.۹.۳ اتحادها و روابط ۴۱۰
۲.۹.۳ مشتق توابع هذلولوی ۴۱۱
۳.۹.۳ انتگرال‌های توابع هذلولوی ۴۱۳
۱۰.۳ توابع معکوس هذلولوی ۴۱۵
۱.۱۰.۳ توابع معکوس هذلولوی، فرم لگاریتمی ۴۱۷
۲.۱۰.۳ مشتق توابع معکوس هذلولوی ۴۱۸
۳.۱۰.۳ انتگرال توابع معکوس هذلولوی ۴۲۰
۱۱.۳ قضیه‌ها با اثبات ۴۲۳
۱۲.۳ تمرین‌ها ۴۳۳

۴ روش‌های انتگرال‌گیری ۴۵۱
۱.۴ جاینشانی‌های جبری ۴۵۲
۲.۴ انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء ۴۵۷
۳.۴ انتگرال‌های مثلثاتی ۴۹۴
۱.۳.۴ انتگرال‌هایی به صورت $\int \sin^n x\,dx$ و $\int \cos^n x\,dx$ ۴۹۴
۲.۳.۴ انتگرال‌هایی به صورت $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ ۴۹۶
۳.۳.۴ انتگرال‌هایی به صورت $\int \tan^n x\,dx$ و $\int \cot^n x\,dx$ ۵۰۲
۴.۳.۴ انتگرال‌هایی به صورت $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ ۵۰۳
۵.۳.۴ انتگرال‌های $\int \sin mx \cos nx\,dx$، $\int \sin mx \sin nx\,dx$ و $\int \cos mx \cos nx\,dx$ ۵۰۷
۴.۴ جاینشانی‌های مثلثاتی ۵۰۹
۱.۴.۴ انتگرال‌هایی شامل عبارت $\sqrt[n]{ax+b}$ ۵۰۹
۲.۴.۴ انتگرال‌هایی شامل عبارت $\sqrt{a^2-x^2}$، $\sqrt{a^2+x^2}$، $\sqrt{x^2-a^2}$ ۵۱۰

www.ketab.ir

www.a-pdf.com ©®

۳.۴.۴ انتگرال‌هایی شامل عبارت‌های $\sqrt{a^۲ - b^۲u^۲}$ و $\frac{۱}{a^۲+b^۲u^۲}$ ۵۳۲
۵.۴ انتگرال‌های توابع گویا ۵۳۳
۱.۵.۴ کسرهای جزئی-عامل‌های خطی ۵۳۴
۲.۵.۴ کسرهای جزئی-عامل‌های درجه دوم تحویل‌ناپذیر ۵۴۶
۶.۴ انتگرال‌هایی شامل عبارت‌های درجه دوم ۵۵۸
۱.۶.۴ انتگرال‌هایی شامل عبارت‌های $\frac{A\,dx}{ax^۲+bx+c}$ ۵۶۲
۲.۶.۴ انتگرال‌هایی شامل عبارت‌های $\frac{Ax+B}{ax^۲+bx+c}\,dx$ ۵۶۲
۷.۴ انتگرال‌های توابع گویا از سینوس و کسینوس ۵۶۴
۱.۷.۴ انتگرال‌هایی به صورت $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$ ۵۷۰
۲.۷.۴ انتگرال‌هایی به فرم $\int \frac{a_۱ \sin x + b_۱ \cos x}{a_۲ \sin x + b_۲ \cos x}$ ۵۷۵
۸.۴ انتگرال‌های توابع با توان‌های گویا ۵۷۶
۱.۸.۴ انتگرال‌های شامل عبارت $f\left(x, x^{\frac{p_۱}{q_۱}}, \ldots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right)$ ۵۷۷
۲.۸.۴ انتگرال‌های شامل عبارت $f\left(x, \sqrt{ax^۲+bx+c}\right)$ ۵۸۰
۳.۸.۴ انتگرال‌های شامل عبارت $\frac{۱}{f(x)\sqrt{g(x)}}$ ۵۸۶
۴.۸.۴ انتگرال‌های شامل عبارت $x^m(a+bx^n)^p$ ۵۸۸
۹.۴ جدول‌های انتگرال‌ها ۵۹۱
۱۰.۴ تمرین‌ها ۵۹۵

۵ صور مبهم و انتگرال‌های ناسره ۵۹۹
۱.۵ قانون هوپیتال ۵۹۹
۱.۱.۵ صور مبهم $\frac{۰}{۰}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ ۶۰۰
۲.۱.۵ صور مبهم $\infty - \infty$، $۰ \times \infty$، $۰^۰$، $\infty^۰$ و ۱^∞ ۶۱۱
۲.۵ انتگرال‌های ناسره ۶۱۷
۱.۲.۵ حدود انتگرال‌گیری نامتناهی ۶۱۷
۲.۲.۵ انتگرال‌هایی با انتگرالده ناپیوسته ۶۳۶
۳.۲.۵ آزمون مقایسه‌ای ۶۴۹
۳.۵ فرمول تیلور ۶۵۲
۴.۵ کاربردهایی از چندجمله‌ای تیلور ۶۶۲
۱.۴.۵ تابع $y = \ln(۱+x)$ ۶۶۵
۲.۴.۵ تابع معکوس تانژانت $y = \tan^{-۱} x$ ۶۶۶
۳.۴.۵ هم‌ارزی ۶۶۷
۵.۵ قضیه‌ها با اثبات ۶۷۱
۶.۵ تمرین‌ها ۶۷۴

۶ دنباله‌ها و سری‌ها ۶۸۱
۱.۶ دنباله‌ها ۶۸۱

www.ketab.ir

www.a-pdf.com ©®

۱.۱.۶ نماد $n!$ ۶۹۱
۲.۶ دنباله‌های یکنوا ۶۹۳
۳.۶ سریهای نامتناهی ۶۹۸
۴.۶ سری‌هایی با جملات مثبت ۷۱۰
۱.۴.۶ آزمون انتگرال ۷۱۱
۲.۴.۶ $p-$سری‌ها ۷۱۳
۳.۴.۶ آزمون مقایسه‌ای ۷۱۵
۴.۴.۶ آزمون‌های نسبت و ریشه ۷۲۱
۵.۶ سری‌های تناوبی و همگرایی مطلق ۷۲۳
۵.۶ خطا در تقریب مجموع یک سری تناوبی ۷۲۶
۲.۵.۶ همگرایی مطلق و مشروط ۷۲۷
۶.۶ سری‌های توانی ۷۳۲
۷.۶ مشتق و انتگرال سری‌های توانی ۷۴۱
۸.۶ سری تیلور و مک‌لورن ۷۴۸
۹.۶ سری دوجمله‌ای ۷۶۱
۱۰.۶ قضیه‌ها با اثبات ۷۶۴
۱۱.۶ تمرین‌ها ۷۷۴

آ انتگرال ریمان ۷۸۳
آ.۱ افرازها و توابع پله‌ای ۷۸۳
آ.۲ انتگرال توابع پله‌ای ۷۸۵
آ.۳ توسیع برخی از نمادگذاری‌ها ۷۸۸
آ.۳.۱ توسیع انتگرال تابع پله‌ای بر زیر مجموعه A از $\mathbb{R}$ ۷۸۹
آ.۴ انتگرال‌های بالایی و پایینی ۸۰۱
آ.۵ توابع یکنوا، قطعه‌قطعه یکنوا و انتگرال‌پذیری ۸۰۷
آ.۶ خواص اساسی انتگرال ۸۱۱

ب جدول‌های عددی ۸۱۹
ب.۱ توابع نمایی و هذلولوی ۸۱۹
ب.۲ توابع مثلثاتی (زاویه برحسب درجه) ۸۲۲
ب.۳ توابع مثلثاتی (زاویه برحسب رادیان) ۸۲۴
ب.۴ لگاریتم‌های طبیعی ۸۲۷

پ انتگرال‌ها ۸۳۱
پ.۱ فرم‌های مقدماتی ۸۳۱
پ.۲ فرم‌های مثلثاتی ۸۳۱
پ.۳ فرم‌هایی شامل $\sqrt{u^2 \pm a^2}$ ۸۳۲

www.ketab.ir

www.a-pdf.com ©®

پ۴ فرم‌هایی شامل $\sqrt{a^2-u^2}$ ۸۳۳
پ۵ فرم‌های نمایی و لگاریتمی ۸۳۳
پ۶ فرم‌های مثلثاتی معکوس ۸۳۴
پ۷ فرم‌های هذلولی ۸۳۴
پ۸ فرم‌های جبری ۸۳۴
پ۹ انتگرال‌های معین ۸۳۵

منابع ۸۳۷

نمایه ۸۳۹

www.ketab.ir