

آنالیز حقیقی

نظریه اندازه و انتگرال گیری

پدیدآورنده

هاینتس باوئر

استاد دانشگاه ارلانگن نورنبرگ

برگرداننده از آلمانی به انگلیسی

ارث برکل

استاد دانشکده ریاضی کانزاس

برگرداندن

رسول نصر اصفهانی

استاد دانشکده علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی اصفهان

فاطمه اختری

پژوهشگر پساکترای دانشکده علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی اصفهان



دانشگاه صنعتی اصفهان

مرکز نشر

شماره کتاب ۱۴۴

گروه علوم ۴۴

آنالیز حقیقی، نظریه اندازه و انتگرال گیری

پدیدآورنده:	هاینتس باوئر
برگرداننده از آلمانی به انگلیسی:	رابرت برکل
برگرداندگار:	رسول نصرافهانی، فاطمه اختری
ویراستار علم:	حمیدرضا ابراهیمی ویشکی
ویراستار هنر:	مجید میرزا وزیری
تایپ و صفحه‌بندی:	فاطمه اختری
طراح جلد:	امیرحسین نصرافهانی
لیتوگرافی، چاپ و تصاویر:	چاپخانه دانشگاه صنعتی اصفهان
ناشر:	مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان
چاپ اول:	زمستان ۱۳۹۴
شمارگان:	۵۰۰ جلد
شابک:	۹۷۸-۶۰۰-۸۲۵۷-۰۱۰
قیمت:	۱۲۰۰۰ ریال

سرشناسه	باوئر، هاینتس، ۱۹۰۸ - ۲۰۰۲ م. Bauer, He.
عنوان و نام پدیدآور	آنالیز حقیقی نظریه اندازه و انتگرال گیری/ پدیدآورنده هاینتس باوئر؛ برگرداننده آلمانی به انگلیسی: رابرت برکل؛ برگرداندگان فارسی: رسول نصرافهانی، فاطمه اختری.
مشخصات نشر	اصفهان: دانشگاه صنعتی اصفهان، مرکز نشر، ۱۳۹۴.
مشخصات ظاهری	شش، ۲۳۹ ص.
فروست	دانشگاه صنعتی اصفهان، مرکز نشر؛ ۱۲۰۰ گروه علوم ۴۴.
شابک	978-600-8257-01-1
وضعیت فهرست نویسی	فیا
یادداشت	عنوان اصلی: Maß- und Integrations theory, 2001.
یادداشت	کتاب حاضر از ترجمه انگلیسی تحت عنوان «Measure and Integration theory» به فارسی برگردانده شده است.
یادداشت	واژه‌نامه.
یادداشت	کتابنامه: ص. [۲۲۳] - ۲۲۷.
یادداشت	تمایه.
موضوع	اندازه گیری -- نظریه
موضوع	انتگرال‌های تعمیم‌یافته
شناسه افزوده	نصرافهانی، رسول، ۱۳۴۶ - مترجم
شناسه افزوده	اختری، فاطمه، ۱۳۶۲ - مترجم
شناسه افزوده	دانشگاه صنعتی اصفهان، مرکز نشر
رده‌بندی کنگره	۵۷۰/۷ QC۲۰۷ ۱۳۹۴ ج ۸الف/
رده‌بندی دیویی	۵۳۰/۸۰۱
شماره کتابشناسی ملی	۴۱۵۵۷۱۴

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان محفوظ است.

اصفهان: دانشگاه صنعتی اصفهان - مرکز نشر - کدپستی ۸۳۱۱۱-۸۴۱۵۶، تلفن: ۰۳۱-۳۳۹۱۲۵۰۹-۱۰ دورنگار: ۳۳۹۱۲۵۵۲ برای خرید اینترنتی کلیه کتاب‌های منتشره مرکز نشر می‌توانید به وبگاه <http://publication.iut.ac.ir> مراجعه و یا مستقیماً از کتابفروشی مرکز نشر واقع در کتابخانه مرکزی دانشگاه صنعتی اصفهان (تلفن ۳۳۹۱۳۹۵۲) خریداری فرمایید.

پیشگفتار مترجمین

«سپاس خدای را که همت حیات بخشید و انسان را آموخت آنچه را نمی دانست»

آنالیز حقیقی مبتنی بر نظریه اندازه و انتگرال گیری برای گرایش های متنوعی از علوم ریاضی ضروری است. این کتاب، این ضرورت را در حدی مطلوب ارایه می کند. نسخه های آلمانی و انگلیسی این کتاب، سال هاست در دانشگاه های متعددی به عنوان کتاب درسی مورد توجه استادان و دانشجویان است و در طیف وسیعی از علوم پایه و علوم مهندسی مورد استفاده قرار می گیرد.

شیوهی نگارش متن در عین غنای ادبی روان است و همزمان با آرایه های مفاهیم کلی نظریه اندازه و انتگرال گیری، محتوای آن با مثال های متنوع همراه شده است؛ به خصوص، فرآیند شهودی ساخت اندازه ی لیگ و کاربردهای آن به طور مستقیم در جریان اصلی کتاب گنجانده شده است. به علاوه، هر بخش با تمرین هایی به پایان می رسد که کاملاً با محتوای ارایه شده در آن بخش، هم از نظر سطح و هم از نظر موضوع سازگار است. پیش نیاز اصلی برای مطالعه ی این کتاب، آشنایی با مفاهیم اولیه ی نظریه مجموعه هاست؛ در عین حال، آشنایی با آنالیز ریاضی نیز در فهم عمیق تر مفاهیم و البته برخورداری بیشتر از کاربردهای آنالیز حقیقی بسیار موثر است.

اگرچه دانشجویان تحصیلات تکمیلی، مجموعه ی اصلی مخاطبان این کتاب را شکل می دهند، ولی دانشجویان سال آخر کارشناسی را نیز می توان در این مجموعه جای داد. به علاوه این کتاب یک منبع مهم برای هر کسی است که درسی را در زمینه ی نظریه اندازه و انتگرال گیری ارایه می کند؛ چرا که اعتبار نویسنده ی آلمانی آن و توانایی مترجم انگلیسی، متن جامع قابل اعتنایی از این نظریه را فراهم آورده است.

از ویراستاران محترم کتاب که بزرگوarane ویرایش علمی و ادبی این کتاب را پذیرفتند و دقت نظر خاص خود را به متن افزودند، سپاس ویژه داریم. از همکاران محترم در مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان و البته همکارانی که بی نام، داوری متن اولیه را عهده دار بودند، قدردانی می کنیم که وسعت نظر آنها منجر به چاپ این کتاب در یک بستر علمی معتبر گردید. از اعضای گروه پارسی لانک در فضای مجازی تشکر فراوان داریم که ظرافت های حروف چینی این متن، نتیجه ی راهنمایی های دلسوزانه و بی توقع آنهاست. بزرگان علمی و اجتماعی کشور را نیز قدر می نهیم که رشد پرشتاب علمی ایران اسلامی در چند دهه ی گذشته بر مجاهدین، آنها استوار است؛ بخصوص استادان و دانشجویان علوم ریاضی، که انگیزه ی اصلی چنین کاری مبتنی بر تلاش خالصانه ی آنهاست.

در پایان، مایه پایان از همراهی بی دریغ همه ی نزدیکان، بویژه خانواده های خود، صمیمانه سپاسگزاریم که با کل گن این ترجمه، مستقیم و غیر مستقیم مدیون آنهاست.

دانشگاه صنعتی اصفهان

زمستان ۱۳۹۴

رسول نصر اصفهانی

فاطمه اختری

پیشگفتار مولف

بیش از سی سال پیش، کتاب درسی من با نام «نظریه‌ی اندازه و نظریه‌ی احتمال»، برای اولین بار منتشر شد. این کتاب حاوی سه فصل مقدماتی در زمینه‌ی نظریه‌ی اندازه و انتگرال‌گیری و نیز یک فصل در زمینه‌ی اندازه‌ی روی فضاها و توپولوژیک بود که با رویکرد نظریه‌ی احتمال آمده بود. این بخش‌های کتاب برای سال‌های متمادی، مبنای ارایه‌ی نظریه‌ی اندازه و انتگرال‌گیری در دانشگاه‌های مختلف بود. چندین نسل از دانشجویان، حتی آنهایی که علاقه‌ی چندانی به نظریه‌ی احتمال نداشتند، از بخش نظریه‌ی اندازه برای مطالعه‌ی شخصی و نیز برای آماده شدن جهت امتحانات استفاده می‌کردند.

هنگامی که تصمیم گرفتم بخش‌های اختصاص یافته به نظریه‌ی احتمال را بازنویسی کنم، مصمم شدم که بخشی را نیز در زمینه‌ی نظریه‌ی اندازه و انتگرال‌گیری در کتابی جداگانه منتشر کنم. این کتاب دو هدف داشت: اول این که همانند قبل، این بخش زمینه‌ی مربوط به نظریه‌ی اندازه را برای کتاب نظریه‌ی احتمال فراهم می‌کرد؛ دوم این که یک دید متنی جامع در زمینه‌ی نظریه‌ی اندازه و انتگرال‌گیری ارایه می‌نمود.

نسخه‌ی آلمانی بازنویسی شده‌ی این کتاب در زمینه‌ی نظریه‌ی احتمال، در سال ۱۹۹۰ منتشر گردید و ترجمه‌ی آن به زبان انگلیسی در سال ۱۹۹۵ تحت عنوان «نظریه‌ی احتمال» به چاپ رسید. اکنون که ترجمه‌ی کتاب «نظریه‌ی اندازه و انتگرال‌گیری» عرضه می‌شود، دو هدف دارد: یکی این که برای علاقه‌مندان نظریه‌ی احتمال، کتابی ضروری فراهم شود و دیگر این که کتابی قابل اعتماد در زمینه‌ی نظریه‌ی اندازه باشد که همیشه و در همه حال، نه تنها برای بسیاری از زمینه‌های ریاضیات، بلکه برای کاربرد آن در فیزیک، اقتصاد و علوم کامپیوتر نیز اهمیت بسیار زیادی دارد.

با این حال، باز هم خاطر نشان می‌کنم که این کتاب چیزی فراتر از یک ترجمه‌ی صرف از کتاب اصلی آلمانی خود است و نقل قول زیر از پیشگفتار کتاب نظریه‌ی احتمال، بیانگر این موضوع است: «این در واقع یک نسخه‌ی بازبینی شده و ارتقا یافته از آن کتاب است. یک مترجم، به معنای صرف کلمه، نمی‌تواند این کار را انجام دهد. این امر، توضیحی است برای این که چرا باید کمال قدردانی خود را از مترجم بسیار حرفه‌ای، همکار آمریکایی‌ام پروفیسور رابرت برکل از دانشگاه دولتی کانزاس ابرار کنم. او با خواندن نسخه‌ی اولیه‌ی آلمانی کتاب من، این کتاب را شناخت. من دوستی خود با او را مدیون علاقه‌ی وی به این کتاب هستم. او انرژی زیادی را بویژه برای این کتاب جدید صرف کرد و از آشنایی گسترده‌ی خود با ادبیات استفاده کرد تا با شهادت آگاهانه‌ای را بدهد و بر وضوح و شفافیت بیشتر کتاب اصرار ورزید و حمایت فوق‌العاده‌ای از اتمام موفقیت آمیز این اقدام مهم داشت».

علاوه بر این من خواهم از دکتر اولدریش اولریش از پراگ برای مهارت و شکیبایی‌اش طی آماده‌سازی نوشته‌های این کتاب در TEX و نیز برای پردازش نهایی تشکر کنم. سپاس فراوان از خانواده‌ام دارم و این پروفیسور رابرت برکل از دانشگاه سوانسی به دلایلی که خود می‌دانند. در پایان، از ناشر خود والترنی کرویتز و بیش از همه از دکتر مانفرد کره برای انتشار ترجمه‌ی این کتاب تشکر می‌کنم.

هاینتس باوئر

ارلانگن، مارس ۲۰۰۱

فهرست مطالب

یک	پیشگفتار، مترجمین
سه	پیشگفتار مولف
۱	مقدمه
۳	نمادگذاری
۷	فصل اول نظریه‌ی اندازه
۹	بخش ۱ σ -جبرها و مولدهای آنها
۱۳	بخش ۲ گردایه‌های دینکین
۱۶	بخش ۳ محتواها، پیش اندازه‌ها، اندازه‌ها
۲۶	بخش ۴ پیش اندازه‌ی لبگ
۳۴	بخش ۵ توسیع یک پیش اندازه به یک اندازه
۴۵	بخش ۶ اندازه‌ی لبگ و اندازه‌های روی اعداد حقیقی
۵۵	بخش ۷ نگاشت‌های اندازه‌پذیر و اندازه‌های نگاره‌ای
۶۴	بخش ۸ ویژگی‌های عملگری اندازه‌ی لبگ
۷۷	فصل دوم نظریه‌ی انتگرال‌گیری
۷۷	بخش ۹ توابع اندازه‌پذیر
۸۴	بخش ۱۰ توابع ساده و انتگرال آنها
۸۸	بخش ۱۱ انتگرال توابع اندازه‌پذیر نامنفی
۹۷	بخش ۱۲ انتگرال‌پذیری

۱۰۶	ویژگی‌های تقریباً همه جا برقرار	بخش ۱۳
۱۱۲	فضاهای $L^p(\mu)$	بخش ۱۴
۱۱۹	قضیه‌های همگرایی	بخش ۱۵
۱۳۳	کاربردهایی از قضیه‌های همگرایی	بخش ۱۶
۱۴۳	اندازه‌های با تابع چگالی: قضیه‌ی رادون-نیکودیم	بخش ۱۷
۱۶۲	اندازه‌های علامت‌دار	بخش ۱۸
۱۶۶	انتگرال‌گیری نسبت به یک اندازه‌ی نگاره‌ای	بخش ۱۹
۱۶۹	همگرایی در اندازه	بخش ۲۰
۱۸۱	هم‌انتگرال‌پذیری	بخش ۲۱

۱۹۷	فصل سوم اندازه‌های حاصل ضربی	
۱۹۷	حاصل ضرب σ -جبرها و اندازه‌ها	بخش ۲۲
۲۰۰	اندازه‌های حاصل ضربی و قضیه‌ی فویننی	بخش ۲۳
۲۱۴	پیش‌اندازه‌های بورل متناهی	بخش ۲۴

۲۲۳	فهرست مراجع
۲۲۹	فهرست واژه‌ها
۲۳۱	فهرست نمادها
۲۳۵	فهرست اسامی
۲۳۷	فهرست راهنما

مقدمه

نظریه‌های اندازه‌گیری، از نظر محتوا و پیشرفت تاریخی، خود دو نظریه‌ی در هم پیچیده هستند که یک مفهوم واحد را تشکیل می‌دهند. توسعه‌ی آنالیز در قرن ۱۹ -مخصوصاً نظریه‌ی سری فوریه و نظریه‌ی کلاسیک توابع- منجر به ساخت یک نظریه‌ی به قدر کافی عمومی از انتگرال شد که در آن توابع نامنظم و ناپیوسته نیز می‌توانند انتگرالده باشند. تابع جهشی دیریکله را می‌توان به عنوان یکی از این توابع در نظر گرفت. در آن زمان تنها یک نظریه‌ی انتگرال‌گیری منسوب به کوشی، به عنوان رمز ساز نظریه‌ی ریمان وجود داشت؛ و تا زمان تکمیل نظریه‌ی ریمان در سال ۱۸۵۴ (که البته کتاب درسی پس از مرگ او در سال ۱۸۶۷ چاپ گردید) ایده‌های کوشی به قدر کافی برای انتگرال‌گیری برخی توابع ناپیوسته، شکل گرفته بود. در اینجا بود که برای اولین بار نیاز به معیاری برای انتگرال‌پذیری احساس شد. موازی با این مسأله، یک «نظریه‌ی محتوا»، بیشتر توسط پتانو و دیگران در حال حاضر در حال توسعه است. برای اندازه‌گیری مساحت نواحی صفحه و حجم «حجره‌های» فضا استفاده می‌شود.

اما دستیابی اصلی به موفقیت، توسط ریاضی‌دانان فرانسوی، بورل و لبگ در آغاز قرن جدید رخ داد. در سال ۱۸۹۸، بورل -با رویکرد نظریه‌ی توابع- مفهوم « σ -جبر» مجموعه‌ها، که امروزه به نام او شناخته می‌شوند، یعنی مجموعه‌های بورل را توصیف نمود و نشان داد که چگونه یک «اندازه» روی این « σ -جبر» می‌توان ساخت که به طرز رضایت بخشی مسائل اندازه‌گیری را حل کند. بویژه، او اهمیت « σ -جمع» بودن یک اندازه را تشخیص داد. لبگ در سال ۱۹۰۲ در رساله‌ی خود مفهوم انتگرال را ارائه نمود و اهمیت آن را برای پیشرفت یک نظریه‌ی کلی نشان داد؛ این مفهوم بعداً به نام او نامیده شد. در همان زمان او ابزاری برای دقیق‌تر کردن ایده‌ی بورل طراحی کرد. از آن زمان به بعد اندازه‌ی لبگ روی « σ -جبر

مجموعه‌های بول و اندازه‌ی لبگ روی یک σ -جبر قدری بزرگ‌تر، متشکل از مجموعه‌هایی که با مفهوم لبگ «اندازه‌پذیر» هستند، به روش‌های استاندارد در آنالیز تبدیل شدند. آنچه درباره مفهوم انتگرال لبگ جدید بود و همان دلیل اصلی معروف شدن آن شد، نه صرفاً نحوه‌ی تعریف آن، بلکه همچنین تطبیق‌پذیری بارز آن در طرز رفتار نسبت به اعمال حدی بود. در نتیجه قضیه‌های همگرایی در کانون نظریه‌ی انتگرال‌گیری قرار دارند که توسط لبگ و نسل فکری او توسعه یافته است.

پیشرفت‌های بعدی با افزایش رشد شناخت تطبیق‌پذیری مفاهیم لبگ در برخورد با نیازهای جدید در ریاضیات و کاربردهای آن مشخص می‌شوند. در این دوره از زمان (تا سال ۳۰) مفهوم اندازه‌ی مجرد متبلور شده، و یک نظریه‌ی انتگرال‌گیری، بر اساس مدل لبگ، بر روی آن ساخته شد.

این همان ندریه‌ای است که در اینجا با یک روش مقدماتی گسترش خواهد یافت؛ البته تا حدی که خواننده بتواند به راحتی سوالات عمیق‌تری را طرح کند و کاربردهای آن را درک نماید. نظریه‌ی ارگودیک، نظریه‌ی طیفی، آنالیز هارمونیک روی گروه‌های فشرده‌ی موضعی و اقتصاد ریاضی برخی از زمینه‌هایی هستند که در آنها اندازه و انتگرال‌گیری نقش کلیدی ایفا می‌کنند. اما بهترین مثال، نظریه‌ی احتمالات است، که از اندازه و انتگرال‌گیری به عنوان ابزار ضروری استفاده کرده و روش‌های خاص آن به نوبه‌ی خود در شکل دهی به این نظریه، کمک نموده است. حتی امروزه نیز گسترش نظریه‌ی اندازه و انتگرال‌گیری پایان نیافته است. فصل اول این کتاب به مفهوم اندازه و در حالت خاص، اندازه‌ی لبگ و اثر متقابل آن با هندسه می‌پردازد. در فصل دوم، انتگرال تعریف شده توسط لبگ اندازه، و به طور خاص، انتگرال لبگ، انتگرالی که با اندازه‌ی لبگ تعریف شده، معرفی و بررسی خواهد شد. فصل کوتاه سوم با حاصل ضرب اندازه‌ها و انتگرال‌های وابسته به آنها سروکار دارد. پیچش اندازه‌ها، کاربردی از این فصل است که در آنالیز فوریه بسیار مهم است.

مثال‌های متمرکز روی بررسی یک موضوع، نقش مهمی در متن دارند. آنها مفاهیم را واضح و محدودیت‌های نظریه را نیز نمایان می‌سازند. از این رو خواننده باید آنها را به دقت بررسی کند. تمرین‌ها نیز این مثال‌ها را همراهی می‌کنند. آنها برای پیشروی بیشتر ضروری نیستند، و به خصوص، اثبات‌ها با واگذاری بخش‌هایی از آن به عنوان تمرین به طور صوری کوتاه نشده‌اند. اما تمرین‌ها برای عمیق‌تر کردن درک خواننده از مسائل مطرح شده در کتاب مفید هستند و پرداختن به آنها بسیار توصیه می‌شود.