

دالیز عددی پیشرفته

تألیف:

داود میرزائی

دانشگاه اصفهان

زمستان ۱۳۹۲

www.ketab.ir

سرشناسه = میرزایی، داود، ۱۳۶۱ -
عنوان و نام پدیدآور : آنالیز عددی پیشرفته/ تالیف داود میرزایی.
مشخصات نشر : اصفهان: دانشگاه اصفهان، ۱۳۹۲.
مشخصات ظاهری : ج، ۴۸۰ص. : مصور، جدول، نمودار.
فروست : انتشارات دانشگاه اصفهان: ۶۰۸.
شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۱۱۰-۰۷۰-۳
وضعیت بررسی نویسی : فیبا
یادداشت : واژه‌نامه.
موضوع : آنالیز عددی - راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع : آنالیز عددی -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالمی)
شناسه افزوده : دانشگاه اصفهان
رده بندی کنگره : QA ۲۹۷/م۹۲۹
رده بندی دیویی : ۱۹۸
شماره کتابشناسی ملی : ۴۶۶۶



انشارات دانشگاه اصفهان

تالیف: دکتر داود میرزایی
ناشر: دانشگاه اصفهان
نوبت چاپ: چاپ اول- زمستان ۱۳۹۲
شمارگان: ۱۰۰۰ جلد
چاپ و صحافی: چاپخانه دانشگاه اصفهان
بهاء: ۱۶۰/۰۰۰ ریال
کلیه حقوق نشر برای ناشر محفوظ است

مراکز فروش کتاب:

اصفهان: میدان آزادی - خیابان دانشگاه - فروشگاه کتاب دانشگاه اصفهان
تلفن: ۰۲۱۱-۷۹۳۲۱۷۷
پُست الکترونیکی: entesharat@ui.ac.ir

تهران: میدان انقلاب - خیابان نصرت - خیابان دکتر قریب، نرسیده به خیابان هفست - پلاک ۱۱
مؤسسه کتابیران، مرکز پخش کتاب‌های دانشگاهی - تلفن: ۱۵-۱۱۰۶۶۶۱۰ - ۰۲۱

فهرست مطالب

الف	فهرست مطالب
۱	پیشگفتار
۵	۱ برخی پیش‌نیازها
۵	۱.۱ نمادهای آوی بزرگ و سری کوچک
۶	۲.۱ بسط تیلر
۹	۳.۱ فضاها و نرم‌ها
۹	۱.۳.۱ فضاهاى خطى نرم‌دار
۱۲	۲.۳.۱ نرم‌های برداری
۱۴	۳.۳.۱ نرم‌های ماتریسی
۱۶	۴.۳.۱ فضاهاى توابع و نرم‌های توابع
۱۹	۵.۳.۱ معادل بودن نرم‌ها
۲۰	۴.۱ عملگرها و تابعک‌های خطی
۲۲	۵.۱ پرسش‌ها
۲۵	۲ آنالیز پایداری و خطا
۲۶	۱.۲ مفاهیم پایه‌ای در تخمین خطا
۲۶	۱.۱.۲ منابع خطا
۲۸	۲.۱.۲ خطاهای مطلق و نسبی
۳۰	۲.۲ نمایش ماشینی اعداد
۳۱	۱.۲.۲ الگوریتم تبدیل بین دستگاه‌ها

۳۲	نمایش ممیز ثابت و ممیز شناور	۲.۲.۲
۳۷	استاندارد IEEE	۳.۲.۲
۴۲	محاسبه‌ی مقادیر توابع مقدماتی	۴.۲.۲
۴۴	وضعیت و پایداری	۳.۲
۴۷	وضعیت مسئله‌های ریاضی	۱.۳.۲
۴۹	ضرب وضعیت	۲.۳.۲
۵۹	پایداری و همگرایی	۴.۲
۶۰	سازگاری	۱.۲
۶۴	پایداری روش عددی	۲.۴.۲
۶۷	پایداری الگوریتم عددی	۳.۴.۲
۶۹	پایداری	۴.۴.۲
۷۱	رابطه بین پایداری و همگرایی	۵.۴.۲
۷۲	آنالیز خطاهای گرد کردن	۵.۲
۷۵	مدل‌ها و مقدمات آلیبریت	۱.۵.۲
۸۲	الگوریتم‌های جمع زدن	۲.۵.۲
۸۷	یک لم کاربردی	۳.۵.۲
۸۸	الگوریتم‌های ضرب داخلی	۴.۵.۲
۹۲	الگوریتم‌های ضرب ماتریسی	۵.۵.۲
۹۳	عملگر ضرب-جمع ترکیبی	۶.۵.۲
۹۴	محاسبات مختلط	۷.۵.۲
۹۵	جلوگیری از سرریزی	۸.۵.۲
۹۷	جلوگیری از خطای حذف	۹.۵.۲
۹۹	هزینه‌های محاسباتی	۶.۲
۱۰۲	پرسش‌ها	۷.۲
۸۱۱		۳ تقریب
۶۱۲	مسئله‌ی بهترین تقریب	۱.۳
۱۱۹	تقریب یکنواخت (تقریب در نرم بینهایت)	۲.۳
۱۲۸	چندجمله‌ایهای چیشف	۱.۲.۳

۱۳۳	تقریب در فضاهاى پیش-هیلبرت (تقریب در نرم دو)	۳.۳
۱۳۵	معادلات نرمال	۱.۳.۳
۱۳۷	دستگاه یکامتعامد	۲.۳.۳
۱۳۹	تقریب در فضای چندجمله ایها	۳.۳.۳
۱۴۳	خاصیت مینیمال چندجمله ایهای متعامد	۴.۳.۳
۱۴۳	ریشه های چندجمله ایهای متعامد	۵.۳.۳
۱۴۵	همگرایی دنباله بهترین تقریب های چندجمله ای در نرم دو	۶.۳
۱۴۶	بسط بر حسب توابع متعامد	۱.۳
۱۵۱	تقریب به کمک توابع مثلثاتی	۸.۳
۱۶۴	تقریب سری مجموعه متناهی از نقاط	۹.۳.۳
۱۷۰	پرسش ها	۴.۳

۴ درونیایی

۱۷۹	درونیایی چندجمله ای	۱.۴
۱۸۱	فرم گرانیگاهی درونیایی گرانژ	۱.۱.۴
۱۸۳	روش نیوتن	۲.۱.۴
۱۸۸	روش نویل-ایتکن	۳.۱.۴
۱۹۱	فرمول باقیمانده ی پنانو	۴.۱.۴
۱۹۳	بحث در همگرایی چندجمله ای درونیایی	۵.۱.۴
۱۹۹	وضعیت (پایداری) مسئله درونیایی	۶.۱.۴
۲۰۸	درونیایی ارمیت	۷.۱.۴
۲۱۳	درونیایی مثلثاتی	۲.۴
۲۱۹	مسئله ی درونیایی تعمیم یافته	۳.۴
۲۲۷	درونیایی گویا	۴.۴
۲۳۱	حل مستقیم دستگاه	۱.۴.۴
۲۳۸	الگوریتم ژاکوبی	۲.۴.۴
۲۳۸	تفاضلات معکوس و تفاضلات متقابل	۳.۴.۴
۲۴۰	تقریب پاده	۵.۴
۲۴۶	پرسش ها	۶.۴
۲۵۵		

۲۶۳	اسپلاین‌ها	۵
۲۶۴	فضای اسپلاین‌ها	۱.۵
۲۶۶	صفرهای اسپلاین‌ها	۱.۱.۵
۲۶۸	اسپلاین‌های درونیاب	۲.۵
۲۶۸	اسپلاین‌های از درجه‌ی فرد	۱.۲.۵
۲۷۲	اسپلاین‌های درجه زوج	۲.۲.۵
۲۷۳	اسپلاین‌ها	۳.۵
۲۸۴	مشتق‌گیری اسپلاین‌های درونیاب به کمک B -اسپلاین‌ها	۴.۵
۲۸۵	اسپلاین درونیاب خطی	۱.۴.۵
۲۸۴	اسپلاین درونیاب مربعی	۲.۴.۵
۲۸۷	اسپلاین درونیاب مکعبی	۳.۴.۵
۲۸-۹	اسپلاین درونیاب کوبیک	۴.۴.۵
۲۹۱	کران‌های خطا	۵.۵
۲۹۴	مثال عددی	۱.۵.۵
۲۹۶	پرسش‌ها	۶.۵
۳-۳	انتگرال‌گیری عددی	۶
۳-۴	فرمول‌های نیوتن-کاتس	۱.۶
۳۰۶	فرمول دوزنقه‌ای	۱.۱.۶
۳۱۰	فرمول سیمسن	۲.۱.۶
۳۱۲	نکات بیشتر در مورد هسته پتانز	۳.۱.۶
۳۱۴	انتگرال‌گیری رامبرگ و برونیابی ریچاردسون	۲.۶
۳۱۴	بسط اویلر-مک‌لورن	۱.۲.۶
۳۲۰	انتگرال‌گیری رامبرگ	۲.۲.۶
۳۲۴	فرمول‌های انتگرال‌گیری گاوس	۳.۶
۳۲۶	خواص فرمول‌های انتگرال‌گیری گاوس	۱.۳.۶
۳۲۹	برخی فرمول‌های گاوسی	۲.۳.۶
۳۳۵	فرمول‌های انتگرال‌گیری خاص	۴.۶
۳۳۵	انتگرال‌گیری روی بازه‌های نامتناهی	۱.۴.۶

۳۳۶	انتگرال‌های تکین	۲.۴.۶
۳۳۸	قضیه همگرایی در حالت کلی	۵.۶
۳۳۹	پرسش‌ها	۶.۶

۷ تقریب و درونیایی چند متغیره

۳۴۹	درونیایی چند متغیره	۱.۷
۳۵۰	فضای هار و قضیه مایر-هوبر-کورتیس	۱.۱.۷
۳۵۲	چند جمله‌ایهای چند متغیره	۱.۱.۷
۳۵۶	درونیایی روی مستطیل	۳.۱.۷
۳۵۸	مابینای ب تانسوری	۱.۷
۳۶۰	مابینای در مثلث	۵.۱.۷
۳۶۳	درونیایی چند جمله‌ای قطعهای، روش المان‌های متاهی	۶.۱.۷
۳۶۵	خطای درونیایی در مثلث	۷.۱.۷
۳۶۹	اسپلاین‌های چند متغیره	۲.۷
۳۶۹	اسپلاین‌های دو خطی	۱.۲.۷
۳۷۱	اسپلاین‌های دو مکعبی	۲.۲.۷
۳۷۲	توابع ترکیب اسپلاینی	۳.۲.۷
۳۷۵	تقریب با روش‌های بدون شبکه	۳.۷
۳۷۶	روش تابع پالایه‌ی شعاعی	۱.۳.۷
۳۸۵	روش کمترین مربعات متحرک	۲.۳.۷
۳۹۳	انتگرال‌گیری عددی چندگانه	۴.۷
۳۹۳	انتگرال‌گیری عددی روی مستطیل	۱.۴.۷
۳۹۴	انتگرال‌گیری عددی روی مثلث	۲.۴.۷
۴۰۰	پرسش‌ها	۵.۷

۸ حل عددی معادلات غیرخطی

۴۰۵	روش نیوتن	۱.۸
۴۱۷	روش‌های تکرار نقطه ثابت	۲.۸
۴۱۸	روش نیوتن برای دستگاه معادلات غیرخطی	۳.۸

۴۲۲ روش‌های نیوتن اصلاح شده	۱.۳.۸
۴۲۵ روش‌های وتری	۴.۸
۴۲۹ پرسش‌ها	۵.۸

۴۳۳	الف بسط تیلر چند متغیره	
-----	-------------------------	--

۴۳۵	ب مدول پیوستگی	
-----	----------------	--

۴۳۶	پ جبر عددی	
-----	------------	--

۴۳۶ حذفی گاوس و تجزیه‌ی LU	
-----	------------------------------	--

۴۴۲ پ.۲ تجزیه‌ی QR حل کمترین مربعات	
-----	---------------------------------------	--

۴۴۵ پ.۳ تجزیه‌ی SVD	
-----	-----------------------	--

۴۴۸ پ.۴ روش‌های تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی	
-----	---	--

۴۵۱ پ.۵ یک قضیه در مورد ماتریس‌ها	
-----	-------------------------------------	--

۴۵۳	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
-----	----------------------------	--

www.ketab.ir

پیشگفتار

این کتاب به منظور تدریس درس "آنالیز عددی پیشرفته" برای دانشجویان کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی، تألیف شده است. از آنجا که مباحث پیشرفته در آنالیز عددی بسیار فراتر از سرفصل‌های تعیین شده برای این درس و مطالب ارائه شده در این کتاب است، به نظر می‌رسد لغت "پیشرفته" برای ایجاد تمایز با دروس دوره کارشناسی لحاظ شده است. بنابراین همین منظور عنوان کتاب را هم‌نام با عنوان درس قرار داده‌ایم.

برخی مباحث ارائه شده در این کتاب نیز از سرفصل‌های تعیین شده برای این درس است، چراکه در برخورد با دانشجویان کارشناسی ارشد در دانشگاه‌های مختلف متوجه شدیم که سرفصل‌های موجود پاسخگوی نیاز آنان در این مقطع و مقطع بالاتر نیستند. ما در این کتاب اسفهان سرفصل جدیدی برای این درس تعریف کردیم و مطالب این کتاب تا حدودی منطبق بر این سرفصل جدید است.

در این کتاب سعی شده است در ابتدا ساختار کلی آنالیز عددی طراحی و جایگاه هر بخش در آن مشخص گردد. بعلاوه هدف از مطالعه‌ی هر بخش و آنچه به دنبال آن هستیم نیز تعیین شوند. به خصوص قسمت‌هایی از فصل ۲ برای این منظور نگارش شده‌اند. به نظر می‌رسد این درس با خستگی‌ناپذیری بیشتری می‌گیرد و او را به خواندن ادامه‌ی کتاب ترغیب می‌کند. در نگارش بخش‌ها از مراجع بسیاری استفاده است، بخصوص از آن‌هایی که شکل‌دهنده و متحد کننده‌ی اجزای این ساختار بوده‌اند. همچنین در برخی بخش‌ها به معطوف به موضوعات جدید و تحقیقاتی است مراجع مفید معرفی شده‌اند. لیست این مراجع در انتهای کتاب آورده شده است.

به نظر نگارنده، این کتاب دارای ویژگی‌های خاص زیر است:

الف. آنالیز پایداری و خطا به عنوان یک فصل مجزا بررسی شده و حدود یک پنجم حجم کتاب را به خود اختصاص داده است. در کمتر کتاب آنالیز عددی درسی، چنین بهایی به این موضوع داده شده است، در حالی که پایداری و خطا اساس آنالیز عددی هستند.

ب. نظریه‌ی تقریب در نرم‌های دو و بینهایت در یک فصل ارائه شده است. این بحث جزء سرفصل‌های تعریف شده‌ی موجود نیست و معمولاً در درس جداگانه‌ای با عنوان "نظریه تقریب" ارائه می‌شود. اما عموماً درس نظریه تقریب در دوره کارشناسی ارشد تدریس نمی‌شود و موکول به مقطع دکتری آن هم فقط

برای دانشجویان "گرایش آنالیز عددی" می‌شود. به نظر می‌رسد بدون ورود به بحث نظریه تقریب هیچگاه نمی‌توان نظریه‌ی درونیابی، بسط‌های متعامده انتگرال‌گیری عددی، مفرمول‌های گاوسی و غیره را به طور بایسته تدریس کرد. بنابراین وجود چنین فصلی در یک کتاب آنالیز عددی لازم است.

پ- مبحث اسپلاین‌ها که آن هم در یک فصل مجزا ارائه شده است، با معرفی فضای اسپلاین‌ها به صورت کلی مطرح شده است. این امر باعث می‌شود دانشجو بتواند تمام داشته‌های خود در تقریب و درونیابی را روی فضای اسپلاین‌ها پیاده‌سازی کند.

ت- فصلی مجزا به تقریب و درونیابی چند متغیره اختصاص داده شده است. در این فصل پایه‌های روش المانهای متناهی و روش‌های بدون شبکه بیان شده‌اند.

ث- در تمامی مدل‌ها، بررسی آمیخته با کاربرد است و جستجو برای یافتن پایدارترین روش موجود تا حد امکان ادامه یافته است. بررسی کامپیوتری بسیاری از روش‌ها در محیط متلب نوشته و در متن کتاب آورده شده است. بر روی انتگرال‌گیری عددی برنامه‌های الگوریتم‌های پایدار برای محاسبه‌ی وزن‌ها و نقاط انتگرال‌گیری گوسی بیان شده‌اند.

به صورت جزئی‌تر، مطالب ارائه شده در این کتاب را می‌توان فصل به فصل به صورت زیر دسته‌بندی کرد. در فصل ۱ تنها برخی مقدمات لازم برای روش‌های عددی اصلی کتاب فراهم شده است که احتمالاً دانشجویان از قبل خیز با آنها آشنایی دارند.

فصل ۲، همانطور که گفته شد یکی از وجوه تمایز این کتاب است و مربوط به آنالیز پایداری و همگرایی و همچنین آنالیز خطاهای گرد کردن است. این مباحث بخشی از پایداری آنالیز عددی را تشکیل می‌دهند. سبک نگارش این فصل بدین صورت است که مراحل طی شده در حل عددی مسئله، از زمانی که یک مدل خام ریاضی است تا زمانی که نتایج حل آن روی مانیتور کامپیوتر نقش می‌بندند، بیان کرده‌ایم و در هر مرحله شرایط لازم برای رفتن به مرحله بعد را بدست آورده‌ایم. این الزامات مربوط به همگرایی، سازگاری و همگرایی‌اند که سعی شده است به نحو نسبتاً ساده و شیوایی بیان شوند و ارتباط بین آنها مشخص آید.

در فصل ۳ درآمدی بر نظریه تقریب آمده است. مسئله بهترین تقریب مطرح و تقریب در نرم‌های بینهایت و دو به عنوان دو حالت خاص بسیار مهم بررسی شده‌اند. ویژگی‌های چندجمله‌ایهای چیشف در تقریب یکنواخت و چندجمله‌ایهای متعامد دیگر در تقریب کمترین مربعات کنکاش شده‌اند. بسط‌های متعامد، تقریب‌های مثلثاتی و به خصوص تقریب روی مجموعه‌ی متناهی از نقاط (که در عمل بسیار کاربردی است) آورده شده‌اند. اکیداً توصیه می‌شود دانشجویان این فصل را به دقت مطالعه کنند و بعد از آن به سراغ فصل‌های آتی بروند.

در فصل ۴ نظریه درونیابی مطرح شده است. درونیابی حالت خاصی از تقریب است اما همواره بهتر است به

عنوان فصل جداگانه‌ای بررسی شود چراکه مشتمل بر مفاهیم منحصر بفرد بسیار زیادی در آنالیز عددی است. در این فصل فرمول هسته پتانو برای یافتن خطا را به طور کامل مطرح کرده‌ایم. اهمیت این فرمول در این است که ارتباط بین همواری تابع و مرتبه همگرایی تقریب را به دانشجو می‌آموزد. بحث در همگرایی چندجمله‌ای درونیاب در انواع نرم‌ها و معرفی ثابت لبگ مطالب مطرح شده‌ی بعدی‌اند. به کمک ثابت لبگ ارتباط بین همگرایی درونیاب و پایداری مسئله‌ی درونیابی کشف می‌شود. پس از آن مسائل درونیابی دیگر مانند درونیابی مثلثاتی و درونیابی گویا مطرح شده‌اند. پس از مطالعه‌ی درونیابی گویا فرصت و مکان را مغتنم شمرده و در انتهای این فصل تقریب پاده معرفی و به روزترین الگوریتم موجود برای محاسبه این تقریب را ارائه کرده‌ایم.

فصل ۵ اسپلاین‌ها اختصاص یافته است. مطالعه‌ی اسپلاین‌ها از این منظر اهمیت دارد که مفهوم تقریب درونیابی موضعی را می‌آموزد و ارتباط بین موضعی بودن و پایدار بودن را مشخص می‌کند. همانطور که گفته شد این فصل با معرفی فضای اسپلاین‌ها آغاز شده است. پایه‌های مختلف این فضا معرفی شده‌اند. در این بین B -اسپلاین‌ها به عنوان پایه کارا ارائه و از آن‌ها در مسائل درونیابی و تقریب استفاده شده است. بعد از مطالعه‌ی این فصل دانشجویان امکان خواهند داشت حتی اسپلاین‌ها را در حل معادلات دیفرانسیل نیز به کار گیرند. انتگرال‌گیری عددی موضوع فصل ۶ این کتاب است. خطاهای انتگرال‌گیری غالباً به کمک فرمول هسته پتانو بدست آمده‌اند. فرمول‌های انتگرال‌گیری عددی که در این فصل مطرح شده‌اند، برنامه‌های کامپیوتری کارا برای محاسبه‌ی وزن‌ها و نقاط گاوسی نوشته شده‌اند. همچنین در مورد فرمول‌های انتگرال‌گیری خاص برای توابع تکین و انتگرال‌های ناسره نیز صحبت شده است.

در فصل ۷ جایی که تقریب و درونیابی چند متغیره بیان شده است یک نام دیگر برای متمایز کردن کتاب با کتاب‌های دیگر برداشته شده است و دانشجویان را برای مباحث تحقیقاتی آینده‌ی خود نیز آماده خواهد کرد. این فصل با قضیه بکتایی در حالت چند بعدی آغاز می‌شود و سپس درونیابی چند متغیره به همراه اسپلاین‌های چند متغیره و انتگرال‌گیری عددی چندگانه ارائه می‌شوند. در بیان تقریب درونیابی چند متغیره پایه‌های روش المان‌های متناهی و مقدمات روش‌های بدون شبکه را نیز مطرح کرده‌ایم.

فصل آخر حل عددی دستگاه معادلات غیر خطی را هدف قرار داده است. روش نیوتن و روش‌های وتری تشریح شده‌اند و در مورد همگرایی هر یک از آنها بحث شده است. توصیه می‌شود در کنار فصل هشتم از مراجع دیگر که مشتمل بر جزئیات بیشتر و همچنین مباحث مربوط به بهینه‌سازی عددی هستند، استفاده شود.

چندین بخش مرتبط با موضوعات مطرح شده، به انتهای کتاب پیوست شده است. بخصوص یک پیوست در مورد جبر خطی عددی است که در آن روش‌های تجزیه‌ی مستقیم دستگاه مانند روش حذفی گاوس، تجزیه‌های QR و SVD به همراه حل کمترین مربعات دستگاه‌های مستطیلی، و روش‌های تکراری کلاسیک آورده شده‌اند.

در انتهای هر فصل تمرینات متنوعی قرار داده شده است. اکیداً توصیه به حل تمرینات بعد از مطالعه‌ی هر فصل می‌شود. برخی از تمرینات نیاز به راه حل‌های مبتکرانه و گاهی پیچیده دارند. بنابراین اگر در تلاش اول موفق به حل آنها نشدید اصلاً نگران نباشید. سعی می‌شود راه حل برخی یا همه تمرینات کم کم آماده و در سایت شخصی نویسنده به آدرس <http://sci.ui.ac.ir/~d.mirzaei> به صورت فایل الکترونیکی منتشر شود.

همانگونه که ذکر شد در برخی از بخش‌ها برنامه‌ی کامپیوتری روش‌های عددی در محیط متلب (Matlab) نوشته و در این کتاب آورده شده است. بنابراین لازم است دانشجویان با این نرم‌افزار آشنایی داشته باشند. مدرسین می‌توانند به دلخواه چند بخش را برای تدریس حذف کنند. برای مثال می‌توان مطالعه‌ی تقریب پاده در بخش ۵.۴ تقریب‌های بدون شبکه در بخش ۳.۷ را اختیاری و به عهده‌ی دانشجو گذاشت. قطعاً این دست‌نویس عالی از اشکال نیست و یا حداقل می‌توان برخی از بخش‌ها را به زبان شیواتری بیان کرد. بنابراین از تمامی استادان و دانش‌آموزان عزیز تقاضا می‌شود اشکالات متن و یا پیشنهادات خود برای بهتر کردن کتاب را از طریق آدرس الکترونیکی d.mirzaei@sci.ui.ac.ir یا ddmirzaei@gmail.com به اطلاع اینجانب برسانند. حتماً فایلی به اشکال نگارشی یا ایرادهای اساسی‌تر (در صورت وجود) روی صفحه خانگی نویسنده قرار خواهد گرفت و همواره به روز خواهد شد.

در پایان لازم است از تمامی کسانی که در تمام این کتاب مرا یاری رساندند کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم. از جناب آقای دکتر مجید فخار و جناب آقای کیوان مهاجر از دانشگاه اصفهان، از جناب آقای دکتر مصطفی شمسی از دانشگاه صنعتی امیرکبیر، از جناب آقای دکتر مهدی تاتاری از دانشگاه صنعتی اصفهان، از جناب آقای دکتر محمد رضا احمدی دارانی از دانشگاه شهرک خوارزمی، از جناب آقای دکتر شاهرخ اسماعیلی از نظرات مفیدشان در برخی قسمت‌ها لحاظ گردید سپاسگذاری می‌شود. از جناب آقای دکتر شاهرخ اسماعیلی از دانشگاه کردستان که تمامی کتاب را با صبر و حوصله مطالعه و نقطه نظرهای خود را ارائه دادند، صمیمانه تشکر می‌کنم. بجاست که در اینجا از دانشجویان کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضیات، دوره‌ی ورودی سال‌های ۹۰، ۹۱ و ۹۲ دانشگاه اصفهان که پیش‌نویس‌های کتاب را مطالعه و ایرادهای آن را گوشه‌نشانند نیز قدردانی کنم. در آخر از خانواده و بخصوص همسر عزیزم که مشوق من در به اتمام رساندن این پروژه وقت فرسا بودند از صمیم قلب تشکر می‌کنم. باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

داود میرزائی

گروه ریاضی دانشگاه اصفهان

پا بیز ۱۳۹۲