

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات مهندسی

www.ketab.ir

تألیف

دکتر جلیل راشد محصل

استاد دانشگاه تهران



انتشارات دانشگاه تهران

شماره ۳۳۰۲

شماره مسلسل ۷۲۳۹

راشد، جلیل، ۱۳۳۰ - ریاضیات مهندسی / تألیف: جلیل راشد محصل. - تهران: دانشگاه تهران، مؤسسه انتشارات، ۱۳۹۱. ی. ۵۷۴ ص. : انتشارات دانشگاه تهران؛ شماره ۳۳۰۲.	
ISBN 978-964-03-6324-9	
فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیبا. کتابنامه. ریاضیات مهندسی -- راهنمای آموزش (عالی). ریاضیات مهندسی -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی). دانشگاه تهران، مؤسسه انتشارات. ۱۳۹۱ ۶۲۰/۰۰۵۱ TA ۳۳۲ / ۵ / ۲ ر ۹ شماره کتابشناسی ملی ۲۷۷۹۴۸۷	

ISBN: 978-964-03-6324-9



9 789640 363249

عنوان: ریاضیات مهندسی

تألیف: دکتر جلیل راشد محصل

نوبت چاپ: اول

تاریخ انتشار: ۱۳۹۱

شمارگان: ۱۰۰۰ نسخه

ناشر: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران

چاپ و صحافی: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران

«مسئولیت صحت مطالب کتاب با مؤلف است»

«کلیه حقوق برای ناشر محفوظ است»

بها: ۱۴۵۰۰۰ ریال

خیابان کارگر شمالی - خیابان شهید فرشی مقدم - مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران

پست الکترونیک: press@ut.ac.ir - سایت: <http://press.ut.ac.ir>

پخش و فروش: تلفکس ۸۸۰۱۲۰۷۸

فهرست مطالب

فصل ۱ - تحلیل فوریه.....	۱
۱-۱- سری فوریه.....	۱
۱-۱-۱- تابع متناوب.....	۲
۱-۱-۲- سری مثلثاتی.....	۲
۱-۱-۳- پدیده گیس.....	۸
۱-۱-۴- کاربرد سری فوریه در محاسبه پاره‌ای از سریها.....	۱۰
۱-۲- توابع متعامد.....	۱۱
۱-۲-۱- یادآوری از بردارهای ینکه.....	۱۱
۱-۲-۲- همگرایی سری فوریه یک تابع.....	۱۵
۱-۲-۳- صبه همگرایی سری فوریه یک تابع.....	۱۶
۱-۳- توابع با دوره تناوب دلخواه.....	۱۸
۱-۴- توابع زوج و فرد.....	۲۱
۱-۵- بسط فوریه توابع زوج و فرد.....	۲۲
۱-۵-۲- گسترش‌های نیم دایره.....	۲۳
۱-۶- شکل مختلط سری فوریه.....	۲۶
۱-۶-۱- طیف یک تابع.....	۲۸
۱-۷- سیستم‌های خطی با ورودی متناوب.....	۳۱
۱-۸- تقریب مثلثاتی برای توابع.....	۳۶
۱-۹- رابطه پارسوال.....	۳۸
۱-۱۰- همگرایی سری فوریه سیگنال‌های متناوب.....	۴۰
۱-۱۱- انتگرال فوریه.....	۴۱
۱-۱۲- تبدیل فوریه.....	۴۷
۱-۱۲-۱- قضیه ربله.....	۵۲
۱-۱۲-۲- توزیع دلتای دیراک.....	۵۳
۱-۱۲-۳- تبدیل فوریه «تابع» ضربه.....	۵۶
۱-۱۳- تبدیل فوریه یک جابیه.....	۵۸
۱-۱۴- حل مسائل نمونه.....	۶۰
چکیده.....	۶۵
مسائل.....	۶۷
فصل ۲ - معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی.....	۷۷
۲-۱- مبانی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی.....	۷۷
۲-۲- مدل‌سازی مسائل فیزیکی.....	۸۱
۲-۳- معادله موج در یک بعد.....	۸۲

۸۲	۲-۳-۱- معادله تار مرتعش.....
۸۵	۲-۳-۲- حل معادله همگن موج - جداسازی متغیرها.....
۹۰	۲-۳-۳- امواج ساکن و امواج رونده.....
۹۳	۲-۳-۴- روش دالامبر برای حل معادله موج.....
۹۷	۲-۴- معادله حرارت در یک بعد.....
۹۹	۲-۴-۱- شناخت شرایط مرزی.....
۱۰۲	۲-۴-۲- حل معادله حرارت.....
۱۰۴	۲-۴-۳- شرایط مرزی ناهمگن - پاسخ حالت پایدار.....
۱۰۸	۲-۴-۴- حل معادله غیرهمگن.....
۱۱۰	۲-۴-۵- حل معادلات غیرهمگن به کمک توابع ویژه.....
۱۱۲	۲-۴-۶- حل معادلات یک بعدی در حالت کلی.....
۱۱۳	۲-۴-۷- مسائل در حوزه نیمه محدود یا نامحدود.....
۱۲۰	۲-۴-۸- شرایط مرزی از نوع سوم.....
۱۲۳	۲-۴-۹- مسأله عادی استوارم - لیوویل.....
۱۳۰	۲-۵- حل مسائل نمونه.....
۱۴۱	چکیده.....
۱۴۳	مسائل.....
۱۵۳	فصل ۳ - معادلات با مشتقات نسبی در دو بعد.....
۱۵۳	۳-۱- مدلسازی پوسته مرتعش.....
۱۵۶	۳-۲- حل معادله موج در ناحیه مستطیلی.....
۱۶۲	۳-۳- معادله موج در ناحیه دایره‌ای.....
۱۶۲	۳-۳-۱- حل معادله موج با تقارن زاویه‌ای.....
۱۶۸	۳-۳-۲- حل معادله موج دوبعدی بدون تقارن زاویه‌ای.....
۱۷۰	۳-۴- حل مسائل نمونه.....
۱۷۹	چکیده.....
۱۸۰	مسائل.....
۱۸۳	فصل ۴ - معادله لاپلاس.....
۱۸۳	۴-۱- توابع همساز.....
۱۸۴	۴-۲- حل معادله لاپلاس در ناحیه مستطیلی.....
۱۹۱	۴-۳- خواص پاسخ‌های معادله لاپلاس.....
۱۹۴	۴-۴- حل معادله لاپلاس در ناحیه دایره‌ای.....
۱۹۷	۴-۵- معادله لاپلاس در سه بعد.....
۱۹۷	۴-۵-۱- حل در مختصات استوانه‌ای با یک درجه تقارن.....
۱۹۹	۴-۵-۲- حل در مختصات کروی با یک درجه تقارن.....

۲۰۲	حل معادله لاپلاس در ناحیه‌های دلخواه
۲۰۳	۱-۶-۴ روش‌های عددی
۲۰۹	۲-۶-۴ روش‌های احتمالاتی
۲۱۲	۷-۴ حل مسائل نمونه
۲۲۲	چکیده
۲۲۳	مسائل

۲۲۷	فصل ۵ - روش‌های تبدیلی
۲۲۷	۱-۵ تبدیل‌های انتگرالی
۲۲۸	۲-۵ حل به کمک تبدیل لاپلاس
۲۳۶	۳-۵ حل به کمک تبدیل فوریه
۲۳۹	۴-۵ تبدیل شکل (فوریه - بسل)
۲۴۲	۵-۵ گروه‌بندی معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی
۲۴۲	۱-۵-۵ معادلات مرتبه دوم
۲۴۴	۲-۵-۵ روش مشخصه‌ها در معادلات مرتبه دوم
۲۴۷	۶-۵ حل مسائل نمونه
۲۵۲	چکیده
۲۵۴	مسائل

۲۵۹	فصل ۶ - توابعی از یک متغیر مختلط
۲۵۹	۱-۶ یادآوری اعداد مختلط
۲۶۰	۱-۱-۶ صفحه مختلط
۲۶۲	۲-۱-۶ شکل قطبی اعداد مختلط
۲۶۶	۲-۶ مجموعه‌ها و ناحیه‌ها در صفحه مختلط
۲۶۷	۳-۶ توابعی از یک متغیر مختلط
۲۷۲	۴-۶ معادلات کوشی - ریمان
۲۷۵	۵-۶ توابع همساز
۲۷۹	۶-۶ توابع مقدماتی
۲۸۶	۷-۶ حل مسائل نمونه
۲۹۱	چکیده
۲۹۳	مسائل

۲۹۵	فصل ۷ - نگاشت‌ها
۲۹۵	۱-۷ نگاشت‌های ساده
۲۹۶	۱-۱-۷ نگاشت با توابع خطی
۲۹۸	۲-۱-۷ نگاشت $w = zn$
۳۰۱	۳-۱-۷ نگاشت قطبی وارونی $(w = \frac{1}{z})$

پیشگفتار

گسترش فناوری و علوم در زمینه‌های مختلف منجر به تحولی اساسی در شیوه زندگی آغاز قرن حاضر شده است. کاربرد رایانه‌ها و گسترش مرزهای دانش به روش‌های ماهرانه در حل مسایل پیچیده نیاز دارد. طراحی و تحلیل سیستم‌های خطی و غیرخطی نیازمند شیوه‌هایی کارآمد و نوین است که مدل‌سازی دقیق مسأله را ضروری می‌سازد. حل این‌گونه مسایل مدل‌سازی شده با ابزاری توانا به نام ریاضیات با تمام ظرافت‌های آن ممکن است.

ریاضیات گویاترین و هیجان‌انگیزترین زبان برای بیان پدیده‌های مختلف است. هیچان ریاضیات از کاربرد آن در زمینه‌های گوناگون مهندسی و علوم سرچشمه می‌گیرد. اما به کارگیری آن بدون توجه به مفاهیم ژرف و بنیادی می‌تواند مخاطره‌آمیز باشد. ریاضیات به دقت ویژه در مفاهیم و کاربرد ماهرانه در علوم نیاز دارد. با این وجود، قوانین آن سراسرست و منطقی است. هرگاه پدیده‌ای چالش برانگیز است، انتخاب یک مدل ریاضی مناسب و سپردن سرانجام کار به محاسبات دقیق ریاضی است که توانایی توجیه پدیده را به کاربر می‌دهد و بارها این مدل‌سازی پرورش‌دهنده اندیشه و توان بشری بوده است.

کتاب درسی حاضر که برای دانشجویان مهندسی و علوم نوشته شده است، اهداف عمده زیر را دنبال می‌کند:

- بیان ساده مفاهیم پایه‌ای ریاضیات و نگرش ویژه به کاربردهای آن
- گسترش توانایی مدل‌سازی مناسب مسایل مختلف در علوم و مهندسی
- پرورش توان تحلیل ریاضی خواننده در رویارویی با دیدگاه‌ها و کاربردهای مختلف

تجربه بیش از سی سال تدریس و تحقیق در ریاضیات مهندسی و دروس وابسته در رشته‌ها و مقاطع مختلف مهندسی و فیزیک نگارنده را بر آن داشت تا در تدوین کتاب ویژگی‌های زیر را مورد نظر قرار دهد:

- ارائه ساده و روشن مفاهیم همراه با مثال‌های گوناگون
- آوردن بخشی با عنوان مسایل حل شده نمونه در هر فصل شامل نکات آموزنده‌ای برای افزایش توانایی تحلیل دانشجویان در حل مسایل
- افزودن چکیده‌ای در پایان هر فصل به منظور مرور مطالب فصل
- ارائه بیش از سیصد مسأله که پاسخ آنها را در انتهای کتاب آمده است. امکان تمرین و روشن‌تر شدن مطالب را برای دانشجویان فراهم می‌سازد.
- پیوست‌های کتاب شامل جدول‌های ریاضی مورد نیاز، توابع بسل، لژاندر و تبدیل لاپلاس است و می‌تواند برای خواننده سودمند باشد و وی را از مراجعه به منابع دیگر بی‌نیاز کند. علاوه بر پانوشته‌ها، واژگان فارسی به انگلیسی و انگلیسی به فارسی نیز برای سادگی کار افزوده شده است.

در این کتاب کوشش شده است تا ضمن توجه به مفاهیم بنیادی ریاضی، با برداشت فیزیکی دقیق به مدل‌سازی مسأله پرداخته شود و همواره این سوال مطرح است که آیا نتیجه با برداشت فیزیکی ما از مسأله سازگار است یا خیر. به این ترتیب برداشت فیزیکی از مسأله با اطمینان ناشی از ریاضیات آمیخته است و تلاش شده است که این دیدگاه در خواننده پرورش یابد.

ساختار کتاب منطبق بر درس ریاضی مهندسی مصوب شورای عالی برنامه‌ریزی برای دانشجویان رشته‌های مهندسی است و با در نظر گرفتن پیوست‌ها در دوازده فصل و معادل با یک درس چهار واحدی تنظیم شده است. با این وجود برای کامل بودن موضوع مطالبی برای علاقمندان آورده شده است که ارائه همه آنها در یک درس الزامی نیست. این مطالب با نماد (*) مشخص شده‌اند و می‌توان از آنها بدون از دست دادن توالی مطلب و موضوع چشم‌پوشی کرد.

موضوع کتاب از سه بخش به ظاهر نایسته به یکدیگر تشکیل یافته است: تحلیل فوریه، معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی و توابعی از یک متغیر مختلط. اما باید در نظر داشت که این سه زمینه عمیقاً به یکدیگر وابسته‌اند. حل مسائل مقادیر اولیه-مرزی بدون آگاهی از تحلیل فوریه ممکن نیست و نظریه پتانسیل نیز ریشه در نگاشت‌ها و تحلیل توابع مختلط دارد. کاربرد توابع مختلط در محاسبه انتگرال‌ها، سری‌ها و تبدیل عکس لاپلاس نیز انکارناپذیر است.

فصل اول کتاب به تحلیل فوریه اختصاص یافته است که در آن سری فوریه، انتگرال فوریه و تبدیل فوریه مورد بحث قرار می‌گیرد. این فصل به سری مثلثاتی و نیز شکل مختلط سری فوریه همراه با کاربردهای آن در تحلیل سیستم‌های خطی و غیرخطی پرداخته است و با تبدیل فوریه یک‌جانبه و ارتباط آن با تبدیل لاپلاس پایان می‌پذیرد.

فصل‌های دوم تا ششم به معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی در یک بعد و بیشتر می‌پردازد و تأکید آن بر معادلات دیفرانسیل مطرح در فیزیک و مهندسی است. فصل چهارم کتاب به معادله لاپلاس اختصاص یافته است. به جرأت می‌توان گفت که معادله لاپلاس بیش از هر معادله دیگری در شاخه‌های مختلف علوم و مهندسی به کار می‌رود و از این رو اهمیت ویژه‌ای دارد. در این فصل به روش‌های مختلف حل این معادله پرداخته شده است. برای حل معادله لاپلاس در ناحیه‌های دلخواه به روش‌های دیگر نظیر روش‌های عددی مختلف و روش‌های احتمالاتی که شامل یافته‌های نگارنده نیز هست، اشاره شده و مقدمه‌ای برای گسترش دید دانشجویان فراهم آمده است. فصل پنجم به روش‌های تبدیلی در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی اختصاص یافته است. این فصل علاوه بر تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه به مباحث دیگری اشاره دارد که برای علاقمندان سودمند است. فصل‌های ششم تا دهم به توابعی از یک متغیر مختلط پرداخته است. این فصول علاوه بر انتگرال خطی در صفحه مختلط، نگاشت‌ها، سری‌ها، نظریه مانده‌ها و کاربردهای مختلف آن را در بر می‌گیرد. این کاربردها شامل محاسبه تبدیل عکس لاپلاس و محاسبه پاره‌ای سری‌ها نیز هست. فصل یازدهم به نظریه پتانسیل اشاره دارد و در آن به کاربرد توابع پتانسیل مختلط و بررسی ویژگی‌های توابع همساز پرداخته شده است.

به طور کلی فصل‌های دوم، چهارم، پنجم، دهم و یازدهم شامل مباحثی تکمیلی از قبیل مسأله اشتورم-لیوویل، حل معادله لاپلاس در ناحیه‌های دلخواه، روش‌های تبدیلی، تبدیل‌های عکس لاپلاس و نظریه پتانسیل است که در یک درس کارشناسی می‌توان از آنها چشم‌پوشی کرد. این مباحث با علامت (*) مشخص شده‌اند.

اگرچه تلاش شده است که مطالب کتاب کامل، گویا و رسا باشد، اما بی‌گمان کاستی‌هایی نیز دارد. نگارنده از پیشنهادات استادان، اندیشمندان، خوانندگان گرامی و دانشجویان عزیز استقبال می‌کند. علاقمندان می‌توانند نظرات خود را با پست الکترونیکی به نگارنده ارسال دارند. در پایان بر خود لازم می‌دانم که از کارکنان محترم مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران که در چاپ و انتشار این اثر همکاری صمیمانه داشته‌اند قدردانی کنم. طی تدریس این درس و دروس مشابه در سی سال گذشته چندین دوره دانشجوی در دانشگاه سیستان و بلوچستان و پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران با دیگران و پرسش‌های خود در شکل‌گیری این کتاب نقش آفرینی داشته‌اند. از این کمک که در به انجام رساندن کار نقش اساسی داشته است کمال تشکر را دارم. همچنین از سرکار خانم لیلا یارمحمدی که در تایپ، صفحه‌بندی و طراحی شکل‌ها نهایت دقت را مبذول داشته‌اند تشکر می‌کنم. همکاری مهندس مانی باستانی پاریزی در نمونه خوانی بخش‌هایی از کتاب مورد امتنان است.

جلیل راشد محصل

استاد دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران

Email: jrasheed@ut.ac.ir