

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

---

## معادلات دیفرانسیل

---

---

مؤلف

مهندس محمود کریمی

|                      |                                                                           |
|----------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| سرشناسه              | کریمی، محمود، ۱۳۵۱ -                                                      |
| عنوان و نام پدیدآور  | معادلات دیفرانسیل / مؤلف محمود کریمی؛ [به سفارش] مرکز خدمات آموزشی نصیر   |
| مشخصات نشر           | تهران: سازمان بسیج دانشجویی، ۱۳۸۹.                                        |
| مشخصات ظاهری         | نه. ۶۷۴ ص.                                                                |
| شابک                 | ۱۳۵۰۰۰ ریال: ۸-۴۴-۸۲۹۰-۹۶۴-۹۷۸                                            |
| وضعیت فهرست نویسی    | فپا                                                                       |
| موضوع                | دانشگاه‌ها و مدارس عالی -- ایران -- آزمون‌ها                              |
| موضوع                | معادله‌های دیفرانسیل -- راهنمای آموزشی (عالی)                             |
| موضوع                | معادله‌های دیفرانسیل -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)                     |
| موضوع                | معادله‌های دیفرانسیل -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)                        |
| شناسه افزوده         | دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی، بسیج دانشجویی، مرکز خدمات آموزشی نصیر |
| شناسه افزوده         | سازمان بسیج دانشجویی                                                      |
| رده‌بندی کنگره       | ۱۳۸۹ م ۶ ۴۱۴ / ک ۲۳۵۳ LB                                                  |
| رده‌بندی دیویی       | ۳۷۸/۱۶۶۴                                                                  |
| شماره کتاب‌شناسی ملی | ۲۱۰۴۳۸۳                                                                   |

|                          |                              |
|--------------------------|------------------------------|
| نام کتاب :               | معادلات دیفرانسیل            |
| مؤلف :                   | محمود کریمی                  |
| ناشر :                   | سازمان بسیج دانشجویی         |
| با همکاری :              | مرکز خدمات آموزشی نصیر       |
| نوبت چاپ :               | اولی                         |
| سال و محل نشر :          | تهران، ۱۳۸۹                  |
| چاپ، آیتوگرافی و صحافی : | اسراء                        |
| ناظر چاپ :               | حسین حسینی، حمیدرضا شاه‌نظری |
| تایپ :                   | مؤسسه عرفان                  |
| تیراژ :                  | ۲۰۰۰ جلد                     |
| قیمت :                   | ۱۳۵۰۰ تومان                  |
| شابک :                   | ISBN ۹۷۸-۹۶۴-۸۲۹۰-۴۴-۸       |

هر گونه چاپ و تکثیر از این اثر ممنوع و به موجب بند ۵ ماده ۲ قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان پیگرد قانونی دارد .

نشانی : خیابان شریعتی، نرسیده به پل سید خندان، دانشکده برق دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، مرکز خدمات آموزشی نصیر تلفن : ۸۸۴۶۴۷۸۰ - ۸۸۴۶۶۹۳۵

## مقدمه ناشر

پس از انتشار کتاب ریاضیات مهندسی توسط انتشارات «مرکز خدمات آموزشی نصیر» و استقبال گسترده از این اثر به دلیل جامعیت آن و با توجه به درخواست‌های متعدد دانشجویان مبنی بر انتشار کتابی جامع و کامل در زمینه «معادلات دیفرانسیل»، تصمیم گرفتیم تا با همکاری مجدد با جناب آقای مهندس محمود کریمی کتاب «معادلات دیفرانسیل» را به قلم این استاد گران قدر منتشر نماییم.

«مرکز خدمات آموزشی نصیر» وابسته به بسیج دانشجویی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، اولین مرکز آموزشی در حیطه آمادگی آزمون‌های کارشناسی ارشد در کشور است که از شروع فعالیت‌های آن قریب به هجده سال می‌گذرد. این مرکز که در سال ۱۳۷۱ توسط دانشجویان بسیجی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی راه‌اندازی شد در طی این سال‌ها همواره در حال رشد و ترقی و تعالی بوده است و علاوه بر گسترش حیطه فعالیت‌ها و گسترش کمی مخاطبان آن، کیفیت آموزش و سطح عملی آن همواره روند رو به رشدی را داشته است. با توجه به این که این مرکز زیرمجموعه بسیج دانشجویی می‌باشد، اصلی‌ترین هدف خود را خدمت‌رسانی، عدالت آموزشی و ارتقاء علمی دانشجویان قرار داده است و از این جهت شاخص‌ترین مرکز آموزشی در میان مؤسسات مشابه است و این حقیقت فراتر از یک ادعای گراف بوده و از این جهت همواره به عنوان مرکزی خوش‌نام و موفق در میان اساتید و دانشجویان محترم مطرح بوده است و به علت اینکه مسئولین و کادر این مرکز نیز اغلب از دانشجویان دانشگاه‌های تهران هستند بیشترین ارتباط را با دانشجویان مخاطب این مرکز دارا بوده و از نقطه نظرات آنان همواره استفاده است. در زیر نکاتی برای آشنایی بیشتر شما مخاطب گرامی با این مرکز ذکر می‌شود:

۱. استفاده از اساتید مجرب و طراز اول دانشگاه‌های تهران که به لحاظ علمی جزو سرآمدترین اساتید کشور می‌باشند از اصلی‌ترین نقاط قوت این مرکز است. اعتقاد ما بر این است که به این نقطه از موفقیت هرگز نائل نمی‌شدیم مگر با مساعدت و تلاش و همکاری صادقانه اساتید گرانقدری که بزرگ‌ترین انگیزه آنان نیز در این مسیر، هدف مقدس و والایی است که سرلوحه فعالیت‌های مرکز قرار گرفته است.

۲. رویکرد ما همواره افزایش سطحی کیفی فعالیت‌ها در عین ارائه آن با کمترین هزینه می‌باشد که با تحقق آن هدف اصلی ما که خدمات‌رسانی و ارتقاء هرچه بیشتر علمی دانشجویان این مرز و بوم در کنار عدالت آموزشی می‌باشد محقق می‌شود و در این میان از حجم فعالیت‌های مؤسسات سود محوری که با تبلیغات رنگارنگ هدفی جز خالی کردن جیب مخاطبان را در نظر ندارند و کم‌ترین توجهی به افزایش کیفیت خدمات ارائه شده نمی‌کنند، می‌کاهد.

۳. باتوجه به برگزاری ۱۸ سال کلاس‌های آموزشی و ۹ سال آزمون‌های آزمایشی، تجربه گرانقدری اندوخته‌ایم که یکی از عوامل اصلی موفقیت روزافزون ما است. این تجربیات که در مواردی سایر مؤسسات نیز از آن استفاده کرده‌اند و از آن الگو گرفته‌اند، همواره مرکز خدمات آموزشی نصیر را در جایگاه پیشروترین مؤسسه آموزشی کارشناسی ارشد قرار داده است.

۴. باتوجه به وابستگی این مرکز به بسیج دانشجویی و باتوجه به اهداف ذکر شده آن، هزینه خدمات ارائه شده کم‌ترین مقدار را در میان تمام مؤسسات مشابه دارا می‌باشد، که این اختلاف عمیق بعضاً باعث تعجب و ایجاد سؤال برای مخاطبانی گردیده که تازه با این مرکز آشنا شده‌اند. ولی آشنایی بیشتر آنان با این مجموعه پاسخ سؤال آنان را داده است.

باتوجه به سابقه درخشان این مرکز در طی این سال‌ها و باتوجه به ضعف موجود در زمینه کتاب‌های کارشناسی ارشد به لحاظ کیفی، این مجموعه تصمیم گرفت که در این زمینه نیز وارد شده و افتخاری به افتخارات این مجموعه بیفزاید.

«مجموعه کتاب‌های کارشناسی ارشد نصیر» که از این پس به مرور در اختیار علاقمندان قرار خواهد گرفت، مجموعه‌ای است بی‌نظیر با رویکردی نوین و ویژگی‌های منحصر به فرد به‌طوری‌که داوطلبان بعد از مراجعه به آن، نیازی به استفاده از منبع دیگری نخواهند داشت و باتوجه به همکاری اساتید گران‌قدری که کوله‌باری از تجربه ارزشمند علمی را در سطح دانشگاه‌ها و کلاس‌های مرکز خدمات آموزشی نصیر با خود دارند و رعایت بالاترین کیفیت در صفحه‌آرایی و چاپ، دانشجویان عزیز لذت واقعی یادگیری را خواهند چشید. در این‌جا لازم است از زحمات فراوان استاد گران‌قدر جناب آقای مهندس محمود کریمی در تألیف این اثر ارزشمند کمال قدردانی را بنماییم.

در پایان اجر معنوی فعالیت‌های این مرکز را تقدیم می‌کنیم به شهدای دفاع مقدس، این شمع‌های همیشه فروزان بشریت که با مقاومت مردانه خود حماسه‌ای جاوید آفریدند.

مرکز خدمات آموزشی نصیر

## مقدمه مؤلف

خوشحالم که فرصتی ایجاد شد تا پس از ۱۸ سال تدریس در کلاس‌های آمادگی آزمون کارشناسی ارشد کتابی در زمینه معادلات دیفرانسیل جهت پوشش نیاز دانشجویان در این آزمون آماده کنم.

به جهت استفاده بهینه از کتاب در زیر به مشخصات کتاب و نحوه مطالعه آن به اختصار می‌پردازم.

۱. این کتاب جهت آمادگی در آزمون کارشناسی ارشد نوشته شده است و شاید در ابتدا حجم زیاد آن برای دانشجویان عزیز نگران‌کننده باشد به همین دلیل لازم است ذکر کنم که بیش از ۸۰ درصد حجم کتاب به دلیل وجود تست‌ها و پاسخ‌های آنهاست و سعی کرده‌ام با دسته‌بندی مناسب تست‌ها برای گرایش‌های مختلف و همچنین تکنیک مطالب مهم از غیرمهم این امکان برای شما ایجاد شود که در صورت نداشتن زمان کافی بتوانید فقط مطالب مهم و فقط تست‌های مربوط به گرایش خودتان را مطالعه نمایید. اما توصیه اینجانب مطالعه کلیه تست‌ها و پاسخ دادن به آن‌ها است.

۲. برای آن‌که نشان داده شود مطالب این کتاب نیاز شما را در آزمون کارشناسی ارشد به‌طور کامل پوشش می‌دهد هیچ تستی به‌طور سلیقه‌ای حذف نشده است و تمامی تست‌های گرایش‌های مهندسی برق، مکانیک و عمران از سال ۱۳۷۰ و تمامی تست‌های گرایش ریاضی از سال ۷۶ و تمامی تست‌های سایر گرایش‌های مهندسی از سال ۷۹ تاکنون در کتاب آورده شده است.

۳. روش‌هایی که در این کتاب مطرح شده است به اعتقاد مؤلف بهترین روش‌ها برای حل تست‌های آزمون کارشناسی ارشد است. ممکن است در حل بعضی معادلات قبلاً از روش‌های دیگری استفاده می‌کردید، توصیه می‌شود آن روش‌ها را کنار گذاشته و مسائل و تست‌ها را به روش‌های گفته‌شده در این کتاب حل کنید. و همچنین گاهی اوقات روش‌های متعددی برای حل یک نوع معادله دیفرانسیل وجود دارد، مثلاً برای حل معادله مرتبه اول کامل چندین روش وجود دارد. سعی شده از بین روش‌های موجود بهترین روش برای پاسخ‌گویی به تست‌ها آورده شود، و به روش‌های دیگر اشاره‌ای نشده است. به این دلیل که این روش نیاز شما را کاملاً پوشش می‌دهد و نیازی به یادگیری روش‌های دیگر نمی‌باشد.

۴. در انتهای هر فصل تست‌های مربوط به آن به‌طور کامل آورده شده است، حتی تست‌های که در داخل متن به‌طور تشریحی حل شده‌اند نیز آورده شده است. با این هدف که به‌هنگام حل دوره‌ای تست‌های آخر فصل تست‌هایی که قبلاً در متن درس حل شده‌اند نیز مرور شود.

۵. به دلیل امانت‌داری و همچنین آشنایی دانشجویان با تست‌ها به همان صورتی که در آزمون ارشد آمده‌اند، سعی شده است هیچ تغییری در صورت تست‌های آزمون ارشد داده نشود و به همان صورت در کتاب آورده شده‌اند.

۶. مطالبی که از آنها تعداد تست‌های اندکی در آزمون کارشناسی ارشد سال‌های قبل آمده است و به عبارت دیگر اهمیت آن‌ها در آزمون‌های کارشناسی ارشد کمتر بوده است به صورت مباحث تکمیلی در انتهای هر فصل آورده شده است، و همچنین چند فصل تکمیلی در انتهای کتاب آورده شده است که در صورت داشتن وقت کافی به آن‌ها بپردازید، به عبارت دیگر اگر قرار است برای درس معادلات دیفرانسیل ۱۰۰ ساعت وقت بگذارید ۹۰ ساعت به مطالب اصلی و ۱۰ ساعت به مطالب تکمیلی اختصاص دهید.

۷. در انتهای هر فصل مسائل و مثال‌های تکمیلی آورده شده است که عموماً نسبت به تست‌های کنکور مشکل‌تر می‌باشند در صورت نیاز به تسلط بیشتر می‌توانید به حل آن‌ها بپردازید اما حل نکردن آن‌ها آسیبی به روند کلی یادگیری این درس وارد نمی‌کند.

۸. برخلاف اعتقاد شخصی به دلیل درخواست اکثر دانشجویان در کتاب معادلات دیفرانسیل پاسخ تشریحی تمامی تست‌ها آورده شده است که دلیل اصلی افزایش حجم کتاب نیز می‌باشند. اما توصیه می‌کنم که بعد از مطالعه هر فصل به پاسخ‌گویی تست‌ها بپردازید و در صورت نرسیدن به پاسخ درست قبل از مراجعه به جواب تشریحی سعی کنید عامل اصلی به جواب نرسیدن را بررسی نمایید چون مطالب کتاب طوری مرتب شده که با خواندن دقیق متن کتاب باید قادر به پاسخ‌گویی تمامی تست‌های انتهای فصل باشید به جز آن‌که نرسیدن به پاسخ درست مربوط به ضعف در محاسبات باشد.

در پایان از همکاری مرکز خدمات آموزشی نصیر و تلاش‌های آقایان مهندس شاه‌نظری و مهندس حسینی تشکر و قدردانی می‌کنم و از اساتید و دانشجویان محترم خواهشمندم منت گذاشته، انتقادات و پیشنهادات خود را از طریق وب سایت شخصی اینجانب اطلاع‌رسانی کنند. بدون گذشت و همراهی همسرم انجام این کار ممکن نبود، سپاس فراوان به خاطر تمامی محبت‌ها و همراهی‌هایش.

محمود کریمی

تایستان ۱۳۸۹

web-site: m-karimi.ir

E-mail: karimi@m-karimi.ir

## فهرست مطالب

عنوان

صفحه

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| فصل اول: معادلات دیفرانسیل            | ۱  |
| تعریف معادله دیفرانسیل                | ۱  |
| تعریف معادله دیفرانسیل خطی و غیرخطی   | ۲  |
| تعریف مرتبه معادله دیفرانسیل          | ۳  |
| معرفی انواع جواب‌های معادله دیفرانسیل | ۴  |
| تشکیل معادله دیفرانسیل                | ۵  |
| معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی       | ۱۰ |
| معادلات دیفرانسیل مرتبه اول غیرخطی    | ۱۵ |
| معادله تفکیک‌پذیر                     | ۱۶ |
| معادله همگن                           | ۱۸ |
| معادله کامل                           | ۲۳ |
| فاکتورانتگرال                         | ۲۷ |
| معادله دیفرانسیل برنولی               | ۴۸ |
| تغییر متغیر                           | ۵۱ |
| محاسبه مسیرهای قائم                   | ۵۷ |
| معادله مرتبه اول درجه ۲               | ۶۵ |
| معادله کلرو                           | ۶۹ |
| مباحث تکمیلی                          | ۷۱ |

|     |                                                     |
|-----|-----------------------------------------------------|
| ۷۱  | معادله لاگرانژ                                      |
| ۷۳  | معادله ربکاتی                                       |
| ۷۵  | معادله مرتبه اول فاقد $x$                           |
| ۷۸  | قضیه وجود یکتایی جواب                               |
| ۸۰  | مسیرهای هم‌زاویه                                    |
| ۸۲  | خلاصه فصل                                           |
| ۸۶  | مسائل تکمیلی                                        |
| ۹۸  | تست‌های کنکور کارشناسی ارشد معادلات مرتبه اول       |
| ۱۴۴ | پاسخ تست‌های فصل اول                                |
| ۲۱۵ | فصل دوم: معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم                |
| ۲۱۵ | معادلات خطی با ضرایب ثابت                           |
| ۲۱۵ | محاسبه جواب عمومی معادله خطی با ضرایب ثابت همگن     |
| ۲۲۰ | محاسبه جواب عمومی معادله خطی با ضرایب ثابت غیرهمگن  |
| ۲۲۰ | روش‌های محاسبه جواب خصوصی                           |
| ۲۲۱ | روش ضرایب نامشخص                                    |
| ۲۲۶ | روش ایراتور معکوس                                   |
| ۲۲۷ | خواص ایراتور $D$                                    |
| ۲۳۴ | روش تغییر پارامتر                                   |
| ۲۴۴ | معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب متغیر                |
| ۲۴۴ | معادله کشی‌اویلر                                    |
| ۲۵۱ | معادله کامل                                         |
| ۲۵۵ | استفاده از یک حل معلوم برای یافتن حلی دیگر          |
| ۲۵۹ | معادلات مرتبه دوم غیرخطی                            |
| ۲۵۹ | معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم غیرخطی فاقد متغیر مستقل |
| ۲۶۳ | معادلات دیفرانسیل غیرخطی همگن                       |
| ۲۶۵ | معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم فاقد متغیر تابع         |
| ۲۶۹ | استقلال خطی و وابستگی خطی توابع                     |
| ۲۷۲ | تغییر متغیر در معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم          |
| ۲۷۶ | مباحث تکمیلی                                        |

|     |                                                    |
|-----|----------------------------------------------------|
| ۲۸۱ | تبدیل به ضرایب ثابت                                |
| ۲۸۹ | مسائل تکمیلی                                       |
| ۲۹۳ | تست‌های کنکور کارشناسی ارشد فصل دوم                |
| ۳۴۰ | پاسخ تست‌های فصل دوم                               |
| ۳۹۹ | فصل سوم: حل معادلات با استفاده از سری‌های توانی    |
| ۳۹۹ | تعریف نقطهٔ تکین منفرد                             |
| ۴۰۲ | معادلهٔ شاخص                                       |
| ۴۰۵ | فرم جواب‌های معادلهٔ دیفرانسیل حول نقطهٔ تکین منظم |
| ۴۰۹ | محاسبهٔ ضرایب                                      |
| ۴۱۰ | روش اول محاسبهٔ ضرایب                              |
| ۴۱۲ | روش دوم محاسبهٔ ضرایب و رابطهٔ بازگشتی             |
| ۴۲۰ | روش سوم محاسبهٔ ضرایب و رابطهٔ بازگشتی             |
| ۴۲۱ | محاسبهٔ شعاع همگرایی جواب به‌صورت سری توانی        |
| ۴۴۳ | تست‌های معادلات دیفرانسیل مبحث سری‌ها              |
| ۴۶۰ | معادلهٔ لژاندر                                     |
| ۴۶۸ | تست‌های معادلهٔ لژاندر                             |
| ۴۷۲ | پاسخ تست‌های معادلهٔ لژاندر                        |
| ۴۷۶ | معادلهٔ بسل                                        |
| ۴۸۵ | تست‌های معادلهٔ بسل                                |
| ۴۹۵ | مباحث تکمیلی                                       |
| ۴۹۹ | معادلهٔ دیفرانسیل گاوس                             |
| ۵۰۰ | معادلهٔ لژاندر وابسته                              |
| ۵۰۱ | مسائل تکمیلی                                       |
| ۵۰۳ | فصل چهارم: تبدیل لاپلاس                            |
| ۵۰۳ | تعریف تبدیل لاپلاس                                 |
| ۵۰۳ | شرایط وجود تبدیل لاپلاس                            |
| ۵۰۸ | محاسبهٔ تبدیل لاپلاس                               |
| ۵۰۹ | معرفی تابع گاما                                    |

|     |                                                    |
|-----|----------------------------------------------------|
| ۵۱۰ | جدول خواص                                          |
| ۵۲۶ | تبدیل لاپلاس توابع چندضابطه‌ای                     |
| ۵۲۸ | تبدیل لاپلاس توابع متناوب                          |
| ۵۳۲ | محاسبه انتگرال‌های معین با استفاده از تبدیل لاپلاس |
| ۵۳۶ | لاپلاس وارون                                       |
| ۵۴۵ | حل معادلات انتگرالی با استفاده از تبدیل لاپلاس     |
| ۵۴۹ | معرفی دلتای دیراک                                  |
| ۵۵۸ | حل دستگاه معادلات خطی با استفاده از تبدیل لاپلاس   |
| ۵۶۳ | مسائل تکمیلی                                       |
| ۵۶۹ | تست‌های کنکور کارشناسی ارشد تبدیل لاپلاس           |
| ۶۰۲ | پاسخ‌نست‌ها                                        |
| ۶۳۹ | فصل پنجم (تکمیلی): دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی    |
| ۶۴۰ | روش تبدیل لاپلاس                                   |
| ۶۴۰ | روش حذفی                                           |
| ۶۴۳ | روش ایراتور $D$                                    |
| ۶۴۸ | روش استفاده از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه         |
|     | فصل ششم (تکمیلی):                                  |
| ۶۵۵ | نظریه توصیفی دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی |
| ۶۵۵ | تعریف صفحه فاز و مسیر                              |
| ۶۵۵ | تعریف دستگاه خودگردان                              |
| ۶۵۵ | تعریف نقطه بحرانی تعادل                            |
| ۶۵۷ | نقطه از نوع گره                                    |
| ۶۵۷ | نقطه زینی                                          |
| ۶۵۸ | نقطه بحرانی مرکز                                   |
| ۶۵۸ | نقطه حلزونی                                        |
| ۶۵۹ | خواص نقطه بحرانی $(0, 0)$                          |

|     |                                                                  |
|-----|------------------------------------------------------------------|
| ۶۶۳ | پایداری به روش لیابانوف                                          |
| ۶۶۷ | فصل هفتم (تکمیلی): تابع ویژه، مقدار ویژه و نظریه اشتورم - لیوویل |
| ۶۶۷ | تعریف نرم                                                        |
| ۶۶۷ | تعریف تعامد تابع                                                 |
| ۶۶۸ | بسط تابع $g(x)$ بر حسب توابع متعامد                              |
| ۶۶۸ | مسئله اشتورم - لیوویل                                            |
| ۶۷۰ | مسئله اشتورم - لیوویل منظم                                       |