



راهنمای حل مسائل

حساب دیفرانسیل و انتگرال

و هندسه تحلیلی توماس (ویرایش دهم)

جلد دوم

مورچ ب. توماس

راس ال. فیلی

موریس د. ویر

باهتمام:

فرزین حاجی جمشیدی - مهرداد آزادی

حاجی جمشیدی، فرزین، ۱۳۳۰-
راهنمای حل مسائل تشریحی حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی توماس / باهتمام فرزین حاجی جمشیدی،
مهرداد آزادی- تهران: صفار: اشراقی، ۱۳۸۳-
ج ۲ در سه مجلد مصور، جدول، نمودار.

ISBN 978-964-388-066-8 (دوره)

ISBN 978-964-388-091-0 (ج ۲)

ISBN 978-964-388-064-4 (ق. ۱، ج. ۱)

ISBN 978-964-388-065-1 (ق. ۲، ج. ۱)

چاپ پنجم: ۱۳۸۸.
فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیبا.
این کتاب راهنمای حل مسائل ویرایش دهم کتاب «حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی» نوشته «جورج ب. توماس، راس ال. فینی و موریس دویر» است.
ج. ۲ (حا اول: ۱۳۸۴).

۱. حساب دیفرانسیل. ۲. حساب دیفرانسیل -- مسائل، تمرینها و غیره. ۳. حساب انتگرال. ۴. حساب انتگرال -- مسائل، تمرینها و غیره. ۵. هندسه تحلیلی. ۶. هندسه تحلیلی -- مسائل، تمرینها و غیره. الف. توماس، جورج برینتن، ۱۹۱۴-
Thomas, George Brinton. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی. ب. فینی، راس ال. و Finney Ross, I. حساب دیفرانسیل و انتگرال هندسه تحلیلی. ج. ویر، موریس. Weir, Maurice D. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی. د. آزادی، مهرداد. عنوان: حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی

۵۱۵/۱۵

Q۸۳۰۳/ت۹-۵۲۳۳

کتابخانه ملی ایران

۸۳-۲۲۴۰۳ م

فهرست نویسی پیش از انتشار: انتشارات صفار

نام کتاب	راهنمای حل مسائل تشریحی حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی توماس - ویرایش دهم، (جلد دوم)
باهتمام	فرزین حاجی جمشیدی - مهرداد آزادی
طرح جلد	فرهاد کمالی
چاپ متن	چاپخانه گنج شایگان
لیتوگرافی	صدف
شمارگان	۲۲۰۰ نسخه
نوبت چاپ	پنجم - ۱۳۸۸
ناشر	انتشارات صفار - اشراقی
قیمت	۷۰۰۰۰ ریال
مرکز پخش	انتشارات اشراقی (Q) ۶۶۴۰۸۴۸۷ پخش کتاب بینش (Q) ۶۶۴۹۶۲۹۹
	تلفن گویا: ۶۶۹۷۰۹۹۲

حق چاپ محفوظ است و مخصوص ناشر می باشد. تهران ۱۳۸۸

www.saffarpublishing.com

ISBN 978-964-388-091-0

شابک : ۹۷۸-۹۶۴-۳۸۸-۰۹۱-۰

www.Eshraghi.ir

ISBN 978-964-388-066-8

شابک : ۹۷۸-۹۶۴-۳۸۸-۰۶۶-۸

به نام خدا

کتاب حاضر سومین کتاب از کتب سه جلدی به نام «تشریح کامل مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی توماس» ویرایش دهم است که با مشارکت تعدادی از دانشجویان ممتاز گروه ریاضی توسط انتشارات اشراقی به چاپ رسیده است.

در این سری کتاب‌ها حل کامل و تشریحی کلیه تمرینات فصول اول تا چهارم، پنجم تا هشتم و نهم تا چهاردهم کتاب توماس، که قبلاً توسط همین انتشارات به چاپ رسیده بود، به ترتیب در سه کتاب جداگانه به نام‌های «کتاب اول - قسمت اول»، «کتاب اول - قسمت دوم» و «کتاب دوم» ارائه شده است که امید است مقبول طبع دانش‌پژوهان عزیز واقع گردد.

در انتها لازم می‌دانیم از همکاری صمیمانه دانشجویان، سرکار خانم‌ها آزاده شیرافکن، نیلوفر ایلخانی و شیرین سردار که قطعاً بدون تلاش و پی‌گیری آنها این مهم به انجام نمی‌رسید تشکر و قدردانی نمائیم.

فرزین حاجی جمشیدی
مهرداد آزادی

خطاب به دانشجویان

حساب دیفرانسیل و انتگرال چیست؟

حساب دیفرانسیل و انتگرال ریاضیات حرکت و تغییر است. هر جا حرکت و رشدی هست، هر جا نیروئی در کار تولید شتاب است، حساب دیفرانسیل و انتگرال دقیقاً ریاضیاتی است که به کار می‌آید. این از ابتدای آفرینش این مبحث درست بوده و امروزه نیز چنین است.

حساب دیفرانسیل و انتگرال در ابتدا در جهت پاسخگویی به نیازهای دانشمندان قرون شانزده و هفده ایجاد شد، نیازهایی که عمدتاً طبیعتی مکانیکی داشتند. حساب دیفرانسیل با مسئله محاسبه آهنگ تغییر سر و کار داشت و بشر را قادر ساخت تا شیب خم‌ها را تعریف کرده، سرعت و شتاب اجسام در حال حرکت را محاسبه نموده، زاویه پرتاب گلوله‌های توپ را برای حصول بیشترین برد بدست آورده و زمانهایی را که سیاره‌ها در نزدیک‌ترین یا دورترین فاصله از یکدیگر قرار می‌گیرند پیش‌بینی کند. حساب انتگرال با مسئله تعیین تابع از روی اطلاعات مربوط به آهنگ تغییر آن سر و کار داشت و بشر را قادر ساخت مکان آتی یک جسم را از روی موقعیت کنونی آن و اطلاعاتی در مورد نیروهای عمل‌کننده بر آن را محاسبه کرده، مساحت نواحی پیچیده را در صفحه بدست آورده، طول خم‌ها را اندازه‌گیری کرده و حجم و جرم اجسام را تعیین کند.

امروزه، حساب دیفرانسیل و انتگرال و گسترش آن در آنالیز ریاضی قلمرو واقعاً وسیعی را در بر گرفته، و فیزیک‌دانان، ریاضی‌دانان و ستاره‌شناسانی که در ابتدا این مبحث را آفریده‌اند، مطمئناً وقتی ببینند چه مسائل پیچیده و متنوعی توسط آن حل شده و در چه میدان وسیعی از مدل‌های ریاضی که به تشریح عالم و جهان اطراف ما می‌پردازند کاربرد دارد، شگفت زده و شادمان خواهند شد، همانطور که امیدواریم شما نیز در این شادمانی سهیم گردید. هدف این کتاب ارائه دیدگاهی مدرن و امروزی از حساب دیفرانسیل و انتگرال و کاربردهای آن در تکنولوژی است.

چگونه حساب دیفرانسیل و انتگرال را بیاموزیم

یادگیری حساب دیفرانسیل و انتگرال مانند یادگیری حساب، جبر، و هندسه نیست. در این درس، شما بصورت مقدماتی می‌آموزید که چگونه اعداد را محاسبه کرده، عبارات جبری را ساده کرده و متغیرها را محاسبه کنید و یا چگونه در مورد نقاط، خطوط و شکل‌ها در صفحه استدلال کنید. حساب دیفرانسیل و انتگرال نیز شامل آن تکنیک‌ها و مهارت‌ها است، اما با دقتی بیشتر و در سطحی عمیق‌تر به بسط مفاهیم دیگری نیز می‌پردازد. این حساب به معرفی بسیاری مفاهیم و عملگرهای محاسباتی جدید می‌پردازد، در حقیقت، شما دیگر قادر نخواهید بود همه مطالب مورد نیاز خود را در کلاس فراگیرید. می‌بایست مقدار متناهی از آنها را با مطالعه انفرادی یا کار با سایر دانشجویان بدست آورید.

چگونه باید حساب دیفرانسیل و انتگرال را آموخت؟

1. کتاب را بخوانید. شما قادر نخواهید بود تمام معانی و ارتباط‌های مورد نیاز خود را فقط با تلاش برای حل تمرینات بدست آورید. شما باید مبحث مربوطه را در کتاب مطالعه کرده و مثالها را قدم به قدم بررسی کنید. در اینجا سریع خواندن بی‌فایده است. باید به روشی منطقی گام به گام مباحث را خوانده و بررسی کرد. این روش خواندن، که برای درک هر مطلب فنی و عمیقی لازم است، توجه، صبر و ممارست شما را طلب می‌کند.
 2. تکالیف را انجام داده و اصول زیر را به ذهن بسپارید.
 - (a) نمودارها را در حد امکان رسم کنید.
 - (b) جواب خود را به روشی منطقی و گام به گام بنویسید، مانند اینکه دارید برای شخص دیگری توضیح می‌دهید.
 - (c) از خود سؤال کنید که علت وجود این تمرین در اینجا چیست؟ چرا طرح شده است؟ ارتباط‌های آن با سایر تمرینات طرح شده کدام است؟
 3. از ماشین حساب و کامپیوتر خود تا حد امکان استفاده کنید. تا می‌توانید هر تمرین را با استفاده از رسام CAS (سیستم کامپیوتری جبری) کامل کنید. حتی اگر تمرین برای این مورد طرح نشده باشد. نمودارها اطلاعات و جانشین‌های هندسی برای مفاهیم و روابط مهم تولید می‌کنند. اعداد می‌توانند طرح‌های مهمی را روشن سازند. یک CAS، آزادی لازم برای کاوش در مسائل و مثالهای واقعی که محاسبات آنها بسیار پیچیده بوده و یا انجام آن توسط دست طولانی است، برای شما فراهم می‌کند.
 4. هرگاه یک بخش از کتاب را کامل کردید، سعی کنید خودتان نکات کلیدی بخش را به صورت کوتاه تشریح کنید. اگر موفق شدید، احتمالاً مطلب را درک کرده‌اید، در غیر این صورت، بررسی کنید که اشکال کار در کجاست.
- بخاطر بسپارید که یادگیری حساب دیفرانسیل و انتگرال یک فرآیند طولانی است، و به سرعت بدست نمی‌آید. صبور باشید، پشتکار داشته باشید، سؤال کنید، در مورد ایده‌ها و درس با همکلاسی‌های خود بحث کنید، و هرگاه لازم شد فوراً کمک بگیرید. پاداش یادگیری حساب دیفرانسیل و انتگرال، کامیابی تحصیلی و موفقیت شغلی است.

جلد دوم

فهرست

مقدمه

خطاب به دانشجویان

۹

مقاطع مخروطی خم‌های پارامتری و مختصات قطبی

- ۹-۱ مقاطع مخروطی و معادلات درجه دوم صفحه ۲۸
 ۹-۲ رده‌بندی مقاطع مخروطی بر حسب خروج از مرکز صفحه ۳۶
 ۹-۳ معادلات درجه دوم و دوران‌ها صفحه ۴۱
 ۹-۴ خم‌های پارامتری در صفحه، صفحه ۴۸
 ۹-۵ حساب دیفرانسیل و انتگرال خم‌های پارامتری شده صفحه ۵۴
 ۹-۶ مختصات قطبی صفحه ۶۰
 ۹-۷ رسم نمودار در مختصات قطبی صفحه ۶۶
 ۹-۸ معادلات قطبی برای مقاطع مخروطی صفحه ۷۱
 ۹-۹ انتگرالگیری در مختصات قطبی صفحه ۷۸
 سؤالات مروری تمرین‌های عملی صفحه ۸۰
 تمرینات اضافی، قضیه، مثال و کاربرد صفحه ۸۵

۱۰

بردارها و هندسه تحلیلی در فضا

- ۱۰-۱ بردار در صفحه، صفحه ۹۶
 ۱۰-۲ دستگاه مختصات کارتزین (مستطیلی) و بردارها در فضا صفحه ۱۰۵
 ۱۰-۳ حاصلضرب نقطه‌ای صفحه ۱۱۲
 ۱۰-۴ حاصلضرب برداری صفحه ۱۲۰
 ۱۰-۵ خطوط و صفحات در فضا صفحه ۱۲۶
 ۱۰-۶ استوانه‌ها و رویه‌های درجه دوم صفحه ۱۳۸
 ۱۰-۷ مختصات استوانه‌ای و کروی صفحه ۱۴۳
 سؤالات مروری تمرین‌های عملی صفحه ۱۴۶
 تمرینات اضافی، قضیه، مثال و کاربرد صفحه ۱۴۹

۱۱

توابع برداری و حرکت در فضا

- ۱۱-۱ توابع برداری و منحنی‌های فضایی صفحه ۱۵۹
 ۱۱-۳ طول قوس و بردار یک‌ه مماس T صفحه ۱۷۳
 ۱۱-۴ انحنا، تاب، و قاب TNB صفحه ۱۸۱
 سؤالات مروری تمرین‌های عملی صفحه ۱۹۲
 تمرینات اضافی، قضیه، مثال و کاربرد صفحه ۱۹۵

توابع چند متغیره و مشتقات جزئی

۱۶۵	۱-۱۲ توابع چند متغیره صفحه، صفحه ۲۰۴
۱۶۸	۲-۱۲ حد و پیوستگی صفحه ۲۱۱
۱۷۳	۳-۱۲ مشتقات جزئی صفحه ۲۱۸
۱۷۸	۴-۱۲ مشتق پذیری، خطی سازی و دیفرانسیل صفحه ۲۲۸
۱۸۳	۵-۱۲ قاعده زنجیره ای صفحه ۲۳۵
۱۸۹	۶-۱۲ مشتقات جزئی با متغیرهای مقید صفحه ۲۴۱
۱۹۱	۷-۱۲ مشتق جهتی، بردار گرادیان، و صفحه مماس صفحه ۲۴۹
۱۹۷	۸-۱۲ مقادیر اکستریم و نقاط زینی صفحه ۲۵۸
۲۰۵	۹-۱۲ ضرایب لاگرانژ صفحه ۲۶۸
۲۱۱	۱۰-۱۲ فرمول تیلور صفحه ۲۷۴
۲۱۵	سؤالات مروری تمرین های عملی صفحه ۲۷۶
۲۲۵	تمرینات اضافی، قضیه، مثال و کاربرد صفحه ۲۸۰

انتگرال های چندگانه

۲۲۹	۱-۱۳ انتگرال های دوگانه صفحه ۲۹۲
۲۳۸	۲-۱۳ مساحت، گشتاور و مرکز جرم صفحه ۳۰۰
۲۴۷	۳-۱۳ انتگرال های دوگانه در شکل قطبی صفحه ۳۰۷
۲۵۳	۴-۱۳ انتگرال های سه گانه در مختصات دکارتی صفحه ۳۱۳
۲۵۸	۵-۱۳ جرم ها و گشتاورها در سه بعد صفحه ۳۱۸
۲۶۴	۶-۱۳ انتگرال های سه گانه در مختصات استوانه ای و کروی صفحه ۳۲۷
۲۷۱	۷-۱۳ جانشانی در انتگرال های چندگانه صفحه ۳۳۷
۲۷۴	سؤالات مروری تمرین های عملی صفحه ۳۳۹
۲۷۹	تمرینات اضافی، قضیه، مثال و کاربرد صفحه ۳۴۲

انتگرال گیری در میدانهای برداری

۲۸۵	۱-۱۴ انتگرال های روی خم صفحه ۳۴۹
۲۸۸	۲-۱۴ میدانهای برداری، کار، گردش، و شار صفحه ۳۵۹
۲۹۲	۳-۱۴ مستقل از مسیر، تابع پتانسیل و میدانهای پایستار صفحه ۳۶۷
۲۹۶	۴-۱۴ قضیه گرین در صفحه صفحه ۳۷۷
۳۰۰	۵-۱۴ مساحت رویه و انتگرال های رویه ای صفحه ۳۸۷
۳۰۶	۶-۱۴ رویه های پارامتری صفحه ۳۵۹
۳۱۲	۷-۱۴ قضیه استوکس صفحه ۴۰۵
۳۱۵	۸-۱۴ قضیه دیورژانس و نظریه وحدت صفحه ۴۱۴
۳۱۹	سؤالات مروری تمرین های عملی صفحه ۴۱۷
۳۲۵	تمرینات اضافی، قضیه، مثال و کاربرد صفحه ۴۲۰

مقاطع مخروطی، معادلات پارامتری و مختصات قطبی

تمرین‌های ۱-۹ (صفحه ۲۸)

شناسایی نمودارها

$$y^2 = 8x \quad (1)$$

خط هادی: $x = -2$ ، کانون: $F(2, 0)$ ، $y^2 = 4px \Rightarrow p = 2$ ، رأس سهمی: $(0, 0)$

$$y^2 = -4x \quad (2)$$

کانون: $F(-1, 0)$ و خط هادی: $x = 1$ ، $y^2 = -4px \Rightarrow p = 1$ ، رأس سهمی: $(0, 0)$

$$x^2 = -6y \quad (3)$$

کانون: $F(0, -\frac{3}{2})$ و $x^2 = -6py \Rightarrow 6p = 6 \Rightarrow p = \frac{3}{2}$

خط هادی: $y = \frac{3}{2}$ ، رأس سهمی: $(0, 0)$

$$x^2 = 2y \quad (4)$$

رأس سهمی: $(0, 0)$ ، کانون: $F(0, \frac{1}{2})$ ، $x^2 = 2py \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

خط هادی: $y = -\frac{1}{2}$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad (5)$$

رنسوس هذلولی: $v(\pm 2, 0)$ و کانون: $F(\pm\sqrt{13}, 0)$ و

$$c = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

مجانِب: $y = \pm \frac{3}{2}x$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (6)$$

کانون: $F(0, \pm\sqrt{5})$ و $c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

رنسوس بیضی: $v(0, \pm 3)$

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \quad (7)$$

کانون: $F(\pm 1, 0)$ و $c = \sqrt{2-1} = 1$

رنسوس بیضی: $v(\pm\sqrt{2}, 0)$

$$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1 \quad (8)$$

کانون: $F(0, \pm\sqrt{5})$ و $c = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

رنسوس هذلولی: $v(0, \pm 2)$

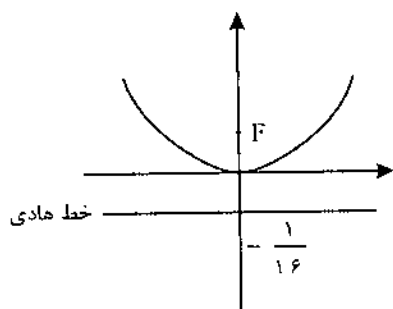
مجانِب: $y = \pm 2x$

سیمی

(۱۳)

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

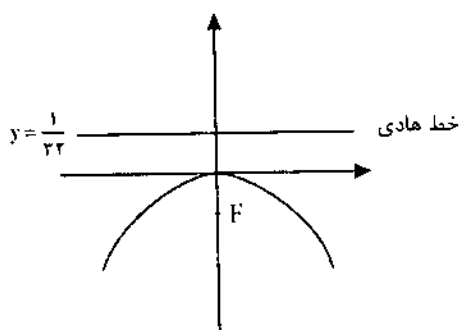
$$x^2 = \frac{1}{2}y, x^2 = \frac{1}{2}py \rightarrow p = \frac{1}{2}, F(0, \frac{1}{4}), y = -\frac{1}{4}$$



(۱۴)

$$y = -\frac{1}{2}x^2 \rightarrow x^2 = -\frac{1}{2}y$$

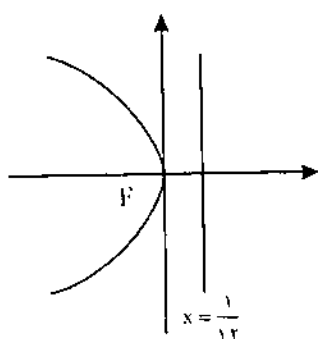
$$x^2 = -\frac{1}{2}py \rightarrow p = \frac{1}{2}, F(0, -\frac{1}{4}), y = \frac{1}{4}$$



(۱۵)

$$x = -\frac{1}{2}y^2 \Rightarrow y^2 = -\frac{1}{2}x$$

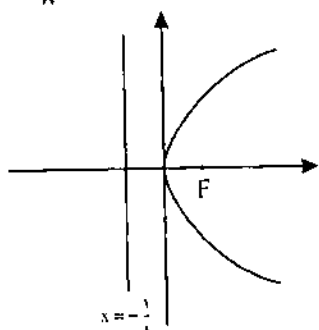
$$y^2 = -\frac{1}{2}px \Rightarrow p = \frac{1}{2}, F(-\frac{1}{4}, 0), x = \frac{1}{4}$$



(۱۶)

$$x = \frac{1}{2}y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{x}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

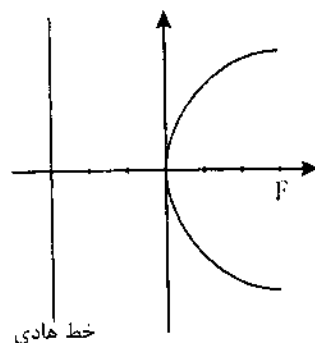
$$F(\frac{1}{4}, 0), x = -\frac{1}{4}$$



(۹)

$$y^2 = \frac{1}{2}x$$

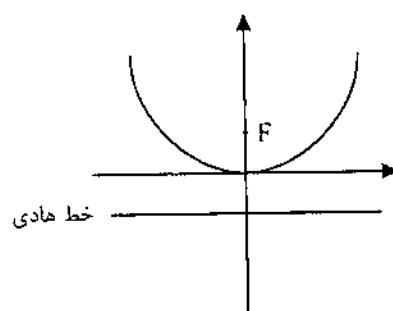
$$y^2 = \frac{1}{2}px \Rightarrow p = \frac{1}{2}, F(\frac{1}{4}, 0), x = -\frac{1}{4}$$



(۱۰)

$$x^2 = \frac{1}{2}y$$

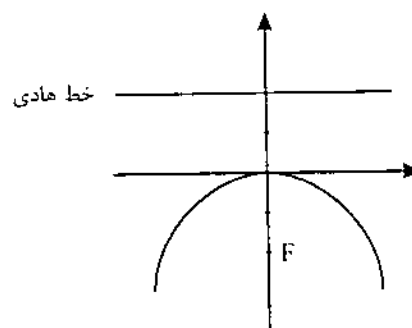
$$x^2 = \frac{1}{2}py \rightarrow p = \frac{1}{2}, F(0, \frac{1}{4}), y = -\frac{1}{4}$$



(۱۱)

$$x^2 = -\frac{1}{2}y$$

$$x^2 = -\frac{1}{2}py \Rightarrow p = \frac{1}{2}, F(0, -\frac{1}{4}), y = \frac{1}{4}$$



(۱۲)

$$y^2 = -\frac{1}{2}x$$

$$y^2 = -\frac{1}{2}px \Rightarrow p = \frac{1}{2}, F(-\frac{1}{4}, 0), x = \frac{1}{4}$$

