

آنالیز حقیقی

تکنیک‌های مدرن و کاربردهای آنها

ویرایش دوم

نوشته

جرالد بی فولند

ترجمه و تشریح

مسعود صباغان



انتشارات دانشگاه تهران

شماره ۲۹۶۱

شماره مسلسل ۶۰۶۰

Folland, G. B. فولند، جی. بی. ۱۹۸۷ - م.
آنالیز حقیقی: تکنیک‌های مدرن و کاربردهای آن / نوشته جرالده بی فولند؛ ترجمه و شرح
مسعود صباغان. تهران: دانشگاه تهران. مؤسسه انتشارات،
ز. ۲۴۴ ص:.

ISBN 978-964-03-5898-6

فهرست‌نویسی براساس اطلاعات فیبا.
عنوان اصلی: Real analysis: modern techniques and their applications,
2nd ed., C1999.

کتابنامه: ص. ۲۰۸ - ۲۱۹.
نماینه.

واژه‌نامه.

آنالیز ریاضی - توابع چندمتغیره حقیقی - صباغان، مسعود، مترجم. دانشگاه تهران. مؤسسه
انتشارات.

۵۱۵

QA۳۰۰ / ف ۲۱۸

۱۶۰۱۸۸۶

شماره کتابشناسی ملی

عنوان: آنالیز حقیقی (تکنیک‌های مدرن و کاربردهای آنها)

تألیف: جرالده بی فولند

ترجمه و شرح: مسعود صباغان

نوبت چاپ: اول

تاریخ انتشار: ۱۳۸۸

شمارگان: ۱۰۰۰ نسخه

ناشر: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران

چاپ و صحافی: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران

شابک: ۶ - ۵۸۹۸ - ۰۳ - ۹۶۴ - ۹۷۸

ISBN 978-964-03-5898-6

«مسئولیت صحت مطالب کتاب با مترجم است»

«کلیه حقوق برای ناشر محفوظ است»

بها: ۳۵۰۰۰ ریال

خیابان کارگر شمالی - خیابان شهید فرش مقدم - مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران

پست الکترونیکی: press@ut.ac.ir - سایت: www.press.ut.ac.ir

پخش و فروش: تلفکس ۸۸۰۱۲۰۷۸

مقدمه مترجم

کتاب آنالیز حقیقی، تکنیک‌های مدرن و کاربرد آنها نوشته جرالده بی فولند را سال ۱۳۷۴ بعنوان مرجع اصلی درس آنالیز حقیقی دوره کارشناسی ارشد گروه ریاضی دانشگاه تهران معرفی نمودم. تقریباً ۱۲ سال است که از روی این کتاب آنالیز حقیقی را تدریس می‌کنم. اعتراف می‌کنم که هنوز نکات و گوشه‌هایی از مطالب را ضمن مطالعه و تدریس آن متوجه می‌شوم و می‌آموزم.

ترجمه این کتاب را از سال ۱۳۷۴ آغاز کرده بودم و هر سال آن را کامل‌تر می‌کردم، اما بعلت مشغله کاری و اداری مجال جمع آوری، تصحیح و انتشار آن را نیافتم. در این کتاب اثبات بخشی از قضایای مهم به خواننده واگذار شده است که بررسی آنها دقت نظر و توجه خاصی را می‌طلبد. بیشتر تمرین‌هایی که در هر بخش ارائه شده‌اند از کیفیت بالایی برخوردار هستند و خواننده را به تفکر وادار می‌نماید.

در این مدت سعی شد که قضایا بطور کامل برای دانشجویان اثبات شوند تا با استفاده از تکنیک‌های بکار رفته در اثبات بتوانند از عهده حل مسائل متنوع کتاب در نظریه اندازه و انتگرال‌گیری برآیند.

سال ۱۳۸۵ متوجه شدم این کتاب توسط همکارانم از دانشگاه صنعتی شاهرود ترجمه و توسط بنیان علوم تهران به چاپ رسیده است. بر آن شدم تا در ترجمه ویرایش دوم کتاب، نخست اثبات قضایایی که بخشی از آنها به خواننده واگذار شده است را بطور کامل تشریح نمایم. سپس مسائلی که در این مدت خارج از کتاب تهیه شده است را به عنوان تمرین‌های گوناگون در انتهای فصل‌های مربوط اضافه نمایم و در نهایت حل کامل بعضی از تمرین‌های مهم کتاب را به عنوان نمونه در انتهای فصل پنجم اضافه کنم. در اینجا لازم است اظهار کنم که در حل بعضی مسائل از تکنیک‌های ارائه شده توسط دانشجویان استفاده شده است. چون برای درس آنالیز حقیقی، سرفصل‌های نظریه اندازه و انتگرال‌گیری، مقدمات آنالیز تابعی، و فضاها L^p کافی به نظر می‌رسند، بر آن شدم که تنها به ارائه همین مطالب از کتاب بسنده کنم. در واقع در ترجمه حاضر سعی کرده‌ام بعضی مطالب و قضایا را تشریح کنم و موارد دوم و سوم بالا را نیز رعایت نمایم. امیدوارم برای دانشجویان و علاقمندان مورد مفید واقع شود. با همه وسواسی که در ترجمه داشته‌ام اطمینان دارم که این ترجمه خالی از نقص نیست. راهنمایی‌ها و تذکرات سودمند همکاران و دانشجویان مرا در برطرف کردن این نقص‌ها یاری می‌دهد.

مسعود صباغان

مهرماه ۱۳۸۶

مقدمه نویسنده

نام «آنالیز حقیقی» معلول یک سهل انگاری تاریخی است. در اصل برای نظریه توابع با متغیر حقیقی بکار می‌رفته است، می‌بایست به موضوعات متنوع کلی‌تر و با طبیعت مجردی بپردازد که تأکید بیشتری روی آنالیز مدرن داشته باشد.

این نظریه‌های کلی و کاربرد آنها موضوع مورد بحث در این کتاب است که عمداً برای کتاب درسی آنالیز دوره تحصیلات تکمیلی در نظر گرفته می‌شود. فصول اول تا هفتم به مواد اصلی نظریه اندازه و انتگرال گیری، توپولوژی عمومی و آنالیز تابعی که بخشی از بیشترین مواد درسی تحصیلات تکمیلی در ریاضیات است، همراه با چند ماده درسی وابسته و غیر متعارف که فکر می‌کنم همه آنالیز دادن‌ها می‌بایست از آن مطلع باشند، اختصاص داده می‌شود. چهار فصل آخر شامل موضوعات مختلفی است که برای معرفی بعضی از شاخه‌های دیگر آنالیز ارائه می‌شوند و کاربرد موارد قبل را تشریح می‌کنند. اعتقاد دارم که همه این موضوعات جالب و مهم هستند، اما انتخاب آنها در ارجحیت با موضوعات دیگر، مساله کاملاً شخصی است.

مواردی که دانستن آنها برای خواندن این کتاب لازم است عبارتند از :

- ۱- اول و مهمتر از همه، نظریه کلاسیک توابع با متغیر حقیقی : حدود و پیوستگی، مشتق گیری و انتگرال گیری (ریمان)، سری های نامتناهی، همگرایی یکنواخت، و مفهوم یک فضای متری است.
- ۲- حساب اعداد مختلط و خواص پایه‌ای تابع نمایی مختلط $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ (نتایج پیشرفته تر از نظریه توابع مختلط تنها در اثبات قضیه ریس-تورین و در چند تمرین و یاد داشت بکاربرده می‌شود).

۳- کمی نظریه مقدماتی مجموعه‌ها

۴- تا اندازه‌ای جبر خطی و در واقع، نه فراتر از تعاریف فضای برداری، تبدیلات خطی و دترمینان.

تمام موارد لازم در (۱) و (۲) را می‌توان در اصول آنالیز ریاضی رودین پیدا کرد (چاپ سوم مک گرو هیل ۱۹۷۶) یا کتب بعد از آن مثل روش آنالیز آراس. استری چارتر (جانز و بارتلت ۱۹۹۵) یا آنالیز حقیقی و مفاهیم اس جی کراتز (انتشارات سی آرسی ۱۹۹۱). خلاصه‌ای اصول مربوط به مجموعه‌ها و فضاهای متری در فصل صفر فراهم شده است. خواننده برای شروع کتاب باید بخش‌های اول و پنجم فصل صفر را برای آشنا شدن به نمادها و اصطلاحات کتاب بازدید نماید. مابقی فصل صفر را می‌توان به عنوان پیشنیاز منظور نمود.

هر فصل با یک بخش تحت عنوان «یادداشت‌ها و مراجع» خاتمه می‌یابد. این بخش‌ها شامل

یادداشت‌های گوناگون، ارائه منابع، اشاره به نتایجی که در متن بحث نشده، مراجع برای مطالعه بیشتر، و یادداشت‌های تاریخی است. یادداشت‌ها کاملاً سطحی و مختصر هستند، اگر چه منابع تفصیلی بیشتری فراهم شده، اما در واقع به این منظور که چگونگی تکامل موضوع از منشا کلاسیک خود را روشن نمایند، ارائه شده اند. خواندن بعضی از مقالات اصلی را سرگرم کننده و آموزنده دریافتم و امیدوارم دیگران را برای انجام این کار تشویق نماید.

قسمت قابل ملاحظه‌ای از کتاب به تمرین‌ها اختصاص داده می‌شود. بیشتر آنها به صورت ادعاهایی هستند که باید اثبات شوند و از سطح بدیهی تا مشکل ارائه می‌شوند. راهنمایی‌ها و قدم‌های مقدماتی برای بیشتر تمرین‌های پیچیده پیشنهاد می‌شوند. هر خواننده باید آنها را به دقت بررسی کند، هرچند که تنها علاقه‌مندان سعی خواهند کرد از عهده حل همه آنها برآیند. در تمرین‌ها چند هدف دنبال می‌شود: توسعه نتایج و کامل کردن برهان‌ها در متن، بحث و گفتگو در مثال‌ها و مثال‌های نقض، کاربرد قضایا و توسعه ایده‌های بیشتر. مدرسین احتمالاً مایل هستند که بعضی از تمرین‌ها را در کلاس حل کنند. برای زیاد کردن انعطاف پذیری و کم کردن زیاده نویسی، من از اصل «وقتی شک و تردید هست، آن را به عنوان تمرین واگذار کنید» پیروی می‌کنم. بخصوص در مورد مثال‌ها. تمرین‌ها در آخر هر بخش آمده است، اما تعدادی در داخل هر فصل به ترتیب شماره گذاری شده‌اند. در مراجعه به آنها، «تمرین m » به معنی m امین تمرین در فصل حاضر است مگر آنکه بخش دیگری صراحتاً اعلام شود.

موضوعات کتاب طوری مرتب شده که در ارائه آن انعطاف پذیری وجود داشته باشد. برای مثال، فصل ۴ به فصل‌های ۱ تا ۳ وابسته نیست مگر برای چند مثال و چند تمرین. از طرف دیگر، اگر نیاز به بررسی سریع فضاها L^p باشد، می‌توان از بخش ۳ فصل سوم تا بخش‌های اول و دوم فصل چهارم صرف نظر کرد و از آنجا به فصل پنجم پرداخت. فصول ده و یازده از فصول هشت و نه مستقل هستند بجز اینکه ایده‌های بخش ششم فصل هشتم در فصل دهم بکار برده می‌شود.

ترکیب جدید این چاپ بصورت زیر است:

- موضوعات در انتگرال لیک m -بعدی (بخش‌های ششم و هفتم فصل دوم) مجدداً مرتب شده و توسعه یافته‌اند.

- قضیه تیخانوف (بخش ششم فصل چهارم) با برهان زیبایی که توسط پول چرنوف کشف شده اثبات شده است.

- فصل آنالیز فوریه به دو فصل (هشت و نه) تقسیم شده است. موضوعات در سری‌های فوریه و انتگرال‌ها (بخش‌های سوم تا پنجم فصل هشتم) مجدداً مرتب شده و اکنون قضیه در شل-جردن برای همگرایی سری‌های فوریه را شامل است. موضوعات توزیع (بخش‌های اول و دوم فصل نهم) بصورت

گسترده‌ای دوباره نویسی شده و توسعه یافته است.

• بجای محاسبات قدیمی شده بعد هاسدورف مجموعه‌های کانتور در بخش دوم فصل دهم قدیم، بخشی شامل خود تشابه و بعد هاسدورف (بخش ۳ از فصل یازدهم) اضافه شده است.

• تغییرات کوچک زیادی برای بهبود وضعیت ایجاد شده‌اند. نویسنده یک کتاب درسی از موضوع خوب توسعه یافته آنالیز حقیقی باید الزاماً به اسلاف خود مدیون باشد. من کتب زیادی هنگام نوشتن این کتاب در اختیار گرفتم. تعداد آنها برای ارائه اینجا بسیار زیاد است اما بیشتر آنها را می‌توان در کتاب‌شناسی پیدا کرد. همچنین خوشحال هستم از تاثیرگذاری دو تا از معلمین خود قدردانی کنم. مرحوم لین لومیس که از تدریس ایشان من اول بار موضوع این کتاب را آموختم، و الیاس استاین که نقطه نظرات من را بسیار شکل داد. بالاخره از تعدادی افراد متشکر هستم، بخصوص استیون کرنتر، کنت رزو ویلیام فاریس که توصیه‌های آنها و اصلاحیه‌های مربوط به چاپ اول کمک کرد تا چاپ جدید را آماده نمایم.

سیاتل، واشنگتون
جرالد بی فولند

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
الف	مقدمه مترجم
ب	مقدمه نویسنده
۱	فصل صفر. پیشنهاد
۱	۱-۰. زبان نظریه مجموعه‌ها
۶	۲-۰. ترتیب‌ها
۸	۳-۰. عدد اصلی
۱۱	۴-۰. مطالب بیشتر راجع به مجموعه‌های خوش ترتیب
۱۳	۵-۰. سیستم اعداد حقیقی توسعه یافته
۱۶	۶-۰. فضای متری
۲۱	۷-۰. یادداشت‌ها و مراجع

۲۳	فصل ۱. اندازه‌ها
۲۳	۱-۱. مقدمه
۲۶	۲-۱. σ -جبرها
۳۳	۳-۱. اندازه‌ها
۴۰	۴-۱. اندازه خارجی
۴۷	۵-۱. اندازه‌های بورل روی $\mathbb{R}$
۶۴	۶-۱. یادداشت‌ها و مراجع

۶۷	فصل ۲. انتگرال گیری
۶۷	۱-۲. توابع اندازه پذیر
۷۷	۲-۲. انتگرال گیری توابع غیر منفی
۸۲	۳-۲. انتگرال گیری توابع مختلط
۹۳	۴-۲. انواع همگرایی
۹۸	۵-۲. اندازه‌های حاصلضربی
۹۸	۶-۲. انتگرال لبک n -بعدی
۱۱۸	۷-۲. انتگرال گیری در مختصات قطبی
۱۲۸	۸-۲. یادداشت‌ها و مراجع

۱۳۳	فصل ۳. اندازه‌های علامت‌دار و مشتق گیری
۱۳۴	۱-۳. اندازه‌های علامت‌دار
۱۳۸	۲-۳. قضیه لبک-رادون-نیکودیم
۱۴۴	۳-۳. اندازه‌های مختلط
۱۴۷	۴-۳. مشتق گیری روی فضای اقلیدسی
۱۵۴	۵-۳. توابع با تغییرات محدود
۱۶۶	۶-۳. یادداشت‌ها و مراجع

فصل ۴. قسمت‌هایی از آنالیز تابعی	۱۶۹
۱-۴. فضای برداری نرم دار	۱۷۰
۲-۴. تابعک‌های خطی	۱۷۷
۳-۴. قضیه کاتگوری پتر و کاربردهای آن	۱۸۳
۴-۴. یادداشت‌ها و مراجع	۱۸۵

فصل ۵. فضاهای L^p	۱۸۷
۱-۵. نظریه مقدماتی فضاهای L^p	۱۸۷
۲-۵. دوگان فضای L^p	۱۹۶
۳-۵. چند نامساوی مفید	۲۰۳
۴-۵. حل بعضی تمرین‌ها	۲۰۸
۵-۵. یادداشت‌ها و مراجع	۲۲۴

فهرست مراجع	۲۲۶
فهرست راهنما	۲۳۹
فهرست علامت‌ها	۲۴۶
واژه‌نامه انگلیسی-فارسی	۲۴۸