

به نام پروردگار بخاژ و یکتا

جبر خطی عددی

دید آوزندگان:

رضا محارمی

استاد دانشکده علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی اصفهان

مسعود رشیدی

کارشناس ارشد آنالیز عددی دانشکده علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی اصفهان



انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان

گروه علوم ۳۸

شماره کتاب ۱۴۱

جبر خطی عددی

پدیدآورندگان.....	رضا مختاری، مسعود رشیدی
ویراستار علمی.....	نبی اله گودرزوند چگینی
تایپ و صفحه آرایی.....	مسعود رشیدی
طراح جلد.....	مسعود رشیدی
لیتوگرافی، چاپ و صحافی.....	چاپخانه دانشگاه صنعتی اصفهان
ناشر.....	انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان
چاپ دوم.....	بهار ۱۴۰۲
شمارگان.....	جلد ۲۰۰
شابک.....	۸۴۷۶-۹۶۴-۹۷۸-۶۱-۳
قیمت.....	ریال ۸۵۰۰۰۰

سرشناسه	مختاری، رضا، ۱۳۴۹
عنوان و نام پدیدآور	جبر خطی عددی/پدیدآورندگان: رضا مختاری، مسعود رشیدی.
مشخصات نشر	اصفهان: دانشگاه صنعتی اصفهان، انتشارات، ۱۳۹۴.
مشخصات ظاهری	ته: ۱۷۰ ص: مصور، جدول.
فروست	دانشگاه صنعتی اصفهان. انتشارات؛ شماره کتاب ۱۴۱. گروه علوم؛ ۴۳
شابک	۸۴۷۶-۹۶۴-۹۷۸-۶۱-۳
وضعیت فهرست نویسی	فیا
یادداشت	ص.ع. به انگلیسی: R. Mokhtari, M. Rashidi. Numerical liner algebra
یادداشت	واژه نامه.
موضوع	جبر خطی - راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	جبر خطی - مسائل، تمرین ها و غیره (عالی)
شناسه افزوده	رشیدی، مسعود، ۱۳۶۵
شناسه افزوده	دانشگاه صنعتی اصفهان. انتشارات
رده بندی کنگره	۱۳۹۴ ج ۳/م ۳/۴۸۱۸۴ QA
رده بندی دیویی	۵/۵۱۲
شماره کتابشناسی ملی	۴۰۴۷۷۸۹

حق چاپ برای انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان محفوظ است.

اصفهان: دانشگاه صنعتی اصفهان - انتشارات - کدپستی ۸۳۱۱۱-۸۴۱۵۶، تلفن: ۰۳۱)۳۳۹۱۲۹۵۲ (دورنگار: ۳۳۹۱۲۵۵۲ (۰۳۱)

برای خرید اینترنتی کلیه کتاب های منتشره انتشارات می توانید به وبگاه <http://publication.iut.ac.ir> مراجعه و یا

مستقیماً از کتابفروشی انتشارات واقع در کتابخانه مرکزی دانشگاه صنعتی اصفهان خریداری فرمائید.

پیش‌گفتار

سپاس پروردگاری که نام او راحت روح و یاد او آرامش بخش دل‌ها است و به یاری او توانستیم باری را به سرمنزل مقصود برسانیم و البته امید داریم که این کار را به درستی انجام داده باشیم. کتاب پیش رو نسخه نهایی دست‌نوشته‌هایی است که چندین سال به عنوان بخش عمده‌ای از درس قدیمی آنالیز عددی دو برای دانشجویان کارشناسی رشته «ریاضی کاربردی» و مرجع اصلی درس جدید جبرخطی عددی برای دانشجویان کارشناسی رشته «ریاضیات و کاربردها» تدریس شده است. نهایت تلاش خود را به کار برده‌ایم تا سرفصل‌های مصوب شورای عالی برنامه‌ریزی وزارت علوم، تحقیقات و فناوری را برای درس جبرخطی عددی دوره کارشناسی رشته‌های «ریاضیات و کاربردها» و «علوم کامپیوتر» به طور مناسبی پوشش داده باشیم. این کتاب با حذف برخی از اثبات‌ها برای دانشجویان رشته‌های مهندسی نیز سودمند است و به علاوه از آن می‌توان به عنوان یک کتاب کمک درسی برای دانشجویان کارشناسی ارشد رشته آنالیز عددی هم بهره برد.

در درس جبرخطی مقدماتی که در آن دیدگاه نظری دنبال می‌شود، دانشجو با مفاهیمی مانند دترمینان یک ماتریس مربعی و یک روش سنتی برای محاسبه آن آشنا می‌شود، روندی که حجم عملیاتی از مرتبه فاکتوریل دارد. حال آنکه در درس جبرخطی عددی می‌آموزد چگونه دترمینان یک ماتریس را به کمک روشی با حجم عملیات خیلی کمتر محاسبه کند. به عنوان مثال برای محاسبه دترمینان یک ماتریس 24×24 با روش سنتی به کمک یک رایانه که 10^{15} عمل ممیز شناور را در یک ثانیه انجام می‌دهد، زمانی حدود ۲۰ سال نیاز است در صورتی که با روش‌های معرفی شده در این درس به کمک همان رایانه این کار در یک چشم برهم زدن انجام می‌شود. مورد بیان شده وجه تمایز درس جبرخطی عددی را از همتای نظری آن به خوبی نشان می‌دهد. اگرچه برخی از پژوهشگران با توجه به گستردگی و استقلال نسبی، جبرخطی عددی را شاخه‌ای جداگانه و نه گرفته شده از آنالیز عددی می‌دانند، اما در واقع جبرخطی عددی یک شاخه پژوهشی جالب و فعال از آنالیز عددی است که بخش وسیعی از آن به مسئله دستگاه معادلات خطی و مسئله ویژه‌مقدار و دیگر مسئله‌های مرتبط با آن‌ها اختصاص دارد. در این کتاب تلاش شده است پس از بررسی مقدماتی مسئله‌های

بیان شده، تجزیه و تحلیل عددی روش‌های حل آن‌ها نیز ارائه شود. نکته قابل توجه آن است که برای دنبال کردن این کتاب باید با مبانی جبرخطی نظری، مبانی آنالیز عددی و یک زبان برنامه‌نویسی علمی مانند MatLab آشنایی کافی داشت (واژه MatLab برگرفته از ابتدای کلمه‌های عبارت Matrix Laboratory به معنای آزمایشگاه ماتریس است). البته با توجه به اینکه این واژه در بیشتر محیط‌ها از جمله در خود نرم‌افزار به صورت «MATLAB» ظاهر می‌شود، آن را به همین صورت به کار می‌بریم.

در فصل اول مفاهیم مقدماتی جبرخطی نظری مانند بردارها، ماتریس‌ها، اعمال ماتریسی، دترمینان، اثر، رتبه و پوچی یک ماتریس و انواع ماتریس‌های خاص مرور می‌شوند و در فصل دوم به بیان مفاهیم پایه‌ای جبرخطی عددی مانند نرم برداری، حاصل ضرب داخلی دو بردار، نرم ماتریسی و شعاع طیفی می‌پردازیم. در فصل سوم پس از بررسی وضعیت مسئله دستگاه معادلات خطی، برخی از روش‌های مستقیم و تکراری در حل این مسئله بررسی می‌شوند. فصل چهارم به مسئله ویژه مقدار و روش‌های حل آن اختصاص داده شده است. برخی از مسئله‌های پرکاربرد مانند مسئله ویژه مقدار تعمیم یافته، مسئله مقدار تکیه و مسئله کمترین مربعات در فصل پنجم بررسی می‌شوند. تعدادی از تابع‌های نرم‌افزار MATLAB و کد الگوریتم‌های انتخاب شده و نتایج اجرای آن‌ها در پیوست «آ» آورده شده است. فایل کدها نیز در تارنمای کتاب به آدرس <http://mokhtari.iut.ac.ir/fa/content/nla-ug-p> در دسترس است. راهنمای حل تمرین‌های انتخاب شده نیز در پیوست «ب» آمده است. برای سهولت در استفاده از کتاب می‌توان از واژه‌یاب قوی فراهم شده در پایان کتاب استفاده کرد که شامل کلمه‌ها و اصطلاحاتی است که در متن به صورت پررنگ ظاهر شده‌اند. همچنین می‌توان از واژه‌نامه جامع آن به عنوان مرجعی هماهنگ بهره برد.

در این کتاب همواره در ادامه مطالب جزئی به منظور راهنمایی برای مطالعه بیشتر، خواننده علاقه‌مند به منبع مناسب ارجاع داده می‌شود. از حروف بزرگ لاتین برای نشان دادن ماتریس و از حروف کوچک برای نمایش بردارها استفاده شده است و در ادامه آن در افراز ستونی و سطری یک ماتریس از حروف کوچک با اندیس‌های بالایی برای نمایش ستون‌ها و از حروف کوچک با اندیس‌های پایینی برای سطرهای آن استفاده کرده‌ایم. همچنین بردار، ماتریس و بلوک صفر با 0 نشان داده می‌شود. با توجه به استفاده بسیار از اندیس i ، از i برای نمایش واحد موهومی استفاده می‌کنیم؛ در واقع $i = \sqrt{-1}$. برخی از قضیه‌هایی که انتظار می‌رود دانشجوی به سادگی می‌تواند آن‌ها را اثبات کند و یا برهان آن‌ها در مراجع دیگر وجود دارد، به صورت گزاره بدون اثبات آورده شده‌اند. به علاوه به منظور پاسداری از زبان فارسی تلاش شده است از قواعد «دستور خط فارسی» مصوب فرهنگستان زبان و ادب فارسی پیروی شود.

طرح روی جلد به یک مسئله در حصارهای شامل زنبورهای عسل اشاره دارد که به تولید یک دستگاه معادلات خطی منجر می‌شود که در مثال ۳-۶ به آن پرداخته‌ایم.

از جناب آقای دکتر نبی‌اله گودرزوند چگینی عضو هیئت علمی دانشگاه تفرش صمیمانه تشکر می‌کنیم چرا که زحمت ویراستاری علمی و ادبی این کتاب را بر عهده داشته و به نکات مهمی اشاره کردند که در ارتقاء کتاب نقش به‌سزایی داشت. از دانشجویانی که زمانی نویسنده اول تدریس درس آنالیز عددی دو یا جبر خطی عددی آن‌ها را بر عهده داشته و همچنین از سرکار خانم دکتر محمدی عضو هیئت علمی دانشگاه خوارزمی، آقای دکتر سعید ترابی (فارغ‌التحصیل دانشگاه ساسکاچوان کانادا)، آقای دکتر مازیار رئیسی (فارغ‌التحصیل دانشگاه جرج میسون آمریکا) و سرکار خانم فریناز مستاجران که زمانی به عنوان دستیار آموزشی درس نقش مؤثری در رفع ایرادهای کتاب داشته‌اند مراتب سپاس خود را به جای می‌آوریم. از جناب آقای دکتر بهرام شریف‌نبی ریاست محترم مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان و همچنین سرکار خانم فروغی و دیگر کارشناسان محترم آن مرکز که با پیگیری امور مربوطه در همه مراحل با جدیت تمام، به نحوی مشوق ما در به‌اتمام رساندن این کار محسوب می‌شوند سپاسگزاری می‌کنیم.

در پایان امیدواریم رضایت نسبی خوانندگان محترم را جلب کنیم و چون کار خود را خالی از اشکال نمی‌بینیم از این عزیزان درخواست داریم ایرادات احتمالی، انتقادات و پیشنهادات خود را به آدرس رایانامه‌های زیر ارسال نمایند.

رضا مخناری mokhtari@iut.ac.ir

مسعود رشیدی m.rashidi@alumni.iut.ac.ir

فهرست مطالب

۱	۱: مفاهیم مقدماتی
۱	۱-۱ بردارها و ماتریس‌ها
۴	۲-۱ اعمال ماتریسی
۵	۳-۱ دترمینان و اثر
۶	۴-۱ پوچی و رتبه
۷	۵-۱ ماتریس‌های خاص
۱۳	۶-۱ تمرین‌ها
۱۵	۲: مفاهیم پایه
۱۵	۱-۲ نرم برداری و حاصل ضرب داخلی
۲۱	۲-۲ نرم ماتریسی
۲۷	۳-۲ شعاع طیفی
۳۰	۴-۲ تمرین‌ها
۳۳	۳: مسئله دستگاه معادلات خطی
۳۳	۱-۳ دستگاه معادلات خطی
۳۴	۲-۳ بررسی وضعیت مسئله دستگاه خطی
۳۷	۳-۳ روش‌های مستقیم
۳۷	۱-۳-۳ قاعده کرامر
۳۸	۲-۳-۳ روش حذف گاوسی
۴۴	۳-۳-۳ روش حذفی گاوس-جردن
۴۷	۴-۳-۳ شمارش اعمال
۵۰	۵-۳-۳ تجزیه مثلثی یک ماتریس
۵۰	۱-۵-۳-۳ روش حذف گاوسی و تجزیه مثلثی

- ۵۹ ۲-۵-۳-۳ محاسبه مستقیم
- ۶۱ ۳-۵-۳-۳ کاربردهای تجزیه مثلثی
- ۶۳ ۴-۵-۳-۳ تجزیه چولسکی
- ۷۱ ۶-۳-۳ بررسی پایداری روش حذف گاوسی
- ۷۸ ۷-۳-۳ بررسی محاسبه وارون
- ۷۹ ۴-۳-۳ روش‌های تکراری
- ۷۹ ۱-۴-۳ روش‌های مبتنی بر تفکیک ماتریسی
- ۸۲ ۲-۴-۳ هم‌گرایی روش‌های تکراری
- ۸۵ ۳-۴-۳ روش زبر-تخفیف متوالی (SOR)
- ۹۰ ۵-۳-۳ تمرین‌ها

۴: مسئله ویژه مقدار

- ۹۵ ۱-۴ مفاهیم پایه
- ۹۶ ۲-۴ بررسی کیفی ویژه مقدارها
- ۱۰۲ ۳-۴ روش‌های عددی
- ۱۰۵ ۱-۳-۴ روش توانی
- ۱۰۶ ۲-۳-۴ روش ژاکوبی
- ۱۰۸ ۳-۳-۴ روش گیبز
- ۱۱۰ ۴-۳-۴ ماتریس هاوس هولدر و کاهش ماتریس‌ها
- ۱۱۱ ۵-۳-۴ ویژه مقدارها و ویژه بردارهای ماتریس سه قطری
- ۱۱۵ ۶-۳-۴ روش‌های LR و QR
- ۱۱۷ ۴-۴-۴ تمرین‌ها
- ۱۲۳

۵: دیگر مسئله‌ها

- ۱۲۷ ۱-۵ مسئله ویژه مقدار تعمیم یافته
- ۱۲۷ ۲-۵ مسئله مقدار تکیه و تجزیه مقدار تکیه (SVD)
- ۱۳۵ ۳-۵ مسئله کمترین مربعات
- ۱۳۵ ۱-۳-۵ مسئله کمترین مربعات خطی
- ۱۳۶ ۲-۳-۵ متعامدسازی در حل مسئله کمترین مربعات خطی
- ۱۳۷ ۳-۳-۵ شبه وارون و مسئله کمترین مربعات
- ۱۳۹ ۴-۵ تمرین‌ها

۱۴۱	آ: کدهای MATLAB به همراه مثال
۱۵۱	ب: راهنمایی برای حل برخی از تمرین‌ها
۱۵۳	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۱۵۷	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۱۶۱	واژه‌یاب
۱۶۹	منابع

فهرست الگوریتم‌ها و کدها

الگوریتم‌ها

- ۳-۱ روش حذف گاوسی ۴۰
- ۳-۲ روش حذفی گاوس-جردن ۴۵
- ۳-۳ روش حذف گاوسی با اعمال ماتریسی ۵۲
- ۳-۴ روش تجزیه مثلثی دولیتل ۶۰
- ۳-۵ روش تجزیه مثلثی کروت ۶۱
- ۳-۶ روش تجزیه مثلثی چولسکی ۶۹
- ۳-۷ روش حذف گاوسی با محورگیری جزئی ۷۳
- ۴-۱ روش‌های عددی در یافتن ویژه‌ها و ماتریسی معلوم ۱۰۵
- ۴-۲ روش توانی ۱۰۷
- ۴-۳ روش ژاکوبی ۱۰۹
- ۴-۴ روش گونز ۱۱۰
- ۴-۵ تصویرکردن بردار دلخواه به ضریبی از $e^{(1)}$ با استفاده از ماتریس هاوس هولدر ۱۱۲
- ۴-۶ روش LR ۱۱۸
- ۴-۷ روش QR ۱۱۹
- ۴-۸ تجزیه QR گرام-اشمیت ۱۲۰
- ۴-۹ تجزیه QR گرام-اشمیت بهبودیافته ۱۲۲
- ۵-۱ فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت ۱۳۱
- ۵-۲ فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت بهبودیافته ۱۳۱

کدهای MATLAB

- آ-۱ روش حذف گاوسی با جایگذاری پسرو ۱۴۲
- آ-۲ تجزیه مثلثی دولیتل ۱۴۳
- آ-۳ روش تکراری ژاکوبی برای حل دستگاه خطی ۱۴۴
- آ-۴ روش ژاکوبی برای محاسبه تقریبی ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارها ۱۴۵
- آ-۵ متعامدسازی گرام-اشمیت ۱۵۰