

ریاضیات تصادفی

مؤلف

عین‌اله پاشا

www.ketab.ir



دانشگاه خوارزمی

پاییز ۱۴۰۰

سرشناسه	: پاشا، عین اله، ۱۳۲۸ -
عنوان و نام پدیدآور	: ریاضیات تصادفی/عین اله پاشا.
مشخصات نشر	: تهران: دانشگاه خوارزمی، ۱۴۰۰.
مشخصات ظاهری	: ش، ۲۹۴ص.
شابک	: ۹۷۸-۶۰۰-۸۵۸۷-۴۹-۱
وضعیت فهرست نویسی	: فیبا
یادداشت	: یادداشت
یادداشت	: واژه نامه.
یادداشت	: کتابنامه: ص. [۲۷۹] - ۲۸۰.
یادداشت	: نمایه.
موضوع	: Stochastic analysis آنالیز تصادفی
موضوع	: Mathematical analysis آنالیز ریاضی
موضوع	: Stochastic processes فراگردهای احتمالی
شناسه افزوده	: دانشگاه خوارزمی
رده بندی کنگره	: QA۲۷۴/۲
رده بندی دیویی	: ۵۱۹/۲
شماره کتابشناسی ملی	: ۸۴۷۶۳۰۶
اطلاعات رکورد کتابشناسی	: فیبا



عنوان کتاب	: ریاضیات تصادفی
تالیف	: عین اله پاشا
ناشر	: دانشگاه خوارزمی
چاپ و صحافی	: دانشگاه خوارزمی
صفحه آرا	: سایت دانیرو - سجاد اسماعیلی
طراح جلد	: فاطمه منظور
نوبت و سال چاپ	: اول، ۱۴۰۰
شابک	: ۹۷۸-۶۰۰-۸۵۸۷-۴۹-۱
شمار	: ۵۰۰ نسخه
قیمت	: ۸۵۰۰۰۰ ریال

پیش‌گفتار

خنک آن قمار بازی که بیاخت هرچه بودش
بنماید هیچش الا هوس قمار دیگر
مولانا

در مقدمه کتاب نظریه احتمال نوشتم «بیاد آوریم سالهایی را که مفاهیم آمار در دانشگاه از آمار توصیفی و احتمال متناهی تجاوز نمی‌کرد. در دبیرستان هم خبری از آمار و احتمال نبود» کلمه آمار در جامعه مترادف با اداره ثبت احوال بود. این‌ها دایره‌هایی از سال‌های ۱۳۴۵ و دورتر است. در این مدت تغییرات بنیادی و چشم‌گیری که در جهان علم رخ داد، موج‌های آن به جامعه علمی ما هم رسید، و اکنون نه تنها در دانشگاه‌ها بلکه در دبیرستان‌ها و حتی مدارس ابتدایی هم مفاهیمی از آمار که جزء یک صد اختراع مهم قرن بیستم است، معرفی می‌شود. در سال‌های ۱۳۶۰ بود که برای اولین بار با مفهوم فرآیندهای تصادفی، حرکت براونی و آن شیء عجیب، نوفه سفید آشنا شدم. درس فرآیند انتشار چند بعدی را در دوره‌ی دکتری آمار می‌گذراندم. آنجا بود که با دستور ایتو، انتگرال تصادفی و معادلات دیفرانسیل تصادفی و برخی دیگر از مفاهیم این چنینی آشنا شدم. عجیب این که خود ایتو را هم که به دعوت دانشگاه محل تحصیلم برای یک اقامت کوتاه آمده بود، دیدم. آن موقع ایتو در نظرم فردی بود مانند سایر افراد که البته بود ولی نبود. این مبتکر بزرگ، به علت عدم آشنایی‌ام با یادگار ماندگار و عمیق او چندان در نظرم بزرگ جلوه نکرد. سال‌ها گذشت وقتی که جزئیات آن درس فرآیند انتشار و هم‌چنین برخی از مفاهیم اصلی از کار ایتو برایم زنده شد کم‌کم به عظمت آن چهره محبوب پی بردم. اوایل سال ۱۳۷۱ بود که مقاله‌ای تحت عنوان «حرکت براونی و نوفه سفید» در مجله رشد آموزش ریاضی نوشتم. گمان

می‌کنم این اولین نوشتاری بود که دانش‌آموزان دبیرستان و دبیران را هدف قرار دادو آن‌ها را با این مفاهیم آشنا می‌کرد. همان‌جا پیشنهاد کردم که وقت آن است این قبیل مفاهیم به «طریقی» جای خود را در دبیرستان‌ها باز کند. باید نوشته‌هایی باشند که دانش‌آموزان علاقمند به صورت مطالعه آزاد در معرض این قبیل مفاهیم قرار گیرند. باز سال‌ها گذشت، در سال ۱۳۹۶ که پس از ۴۵ سال بازنشسته شدم گفتم هرچه که داشتم باختم فقط یک هوس دیگر در سر دارم، و آن نوشتن کتابی در زمینه میراث ماندگار ایتو یعنی ریاضیات تصادفی است. البته پیشنهاد ریاست محترم موسسه ریاضیات دکتر مصاحب آقای دکتر معماریانی بی‌تأثیر نبود. ایشان با چهره‌ی گشاده در برخوردی برانگیزاننده مرا به فکر وا داشت تا در تحقق این تنها هوس باقی‌مانده کتابی در زمینه ریاضیات تصادفی بنویسم.

البته همین سال‌ها برخی از همکاران دانشمند در دانشگاه‌ها به معرفی این قبیل مطالب در قالب سمینار، مباحث ویژه، پایان‌نامه، رساله، سخنرانی و نوشتن مقاله‌های با ارزش پرداختند. حتی جزوه‌هایی هم در این زمینه فراهم آمد اما هیچ یک به زیور طبع آراسته نشدند. شاید حق با آن‌ها بود و قدم نهادن در چنین مسیر پر پیچ و خم و پر دست انداز کار سازنده‌ای نباشد. به هر حال باید یکی از جایی شروع می‌کرد که ظاهراً قرعه فال به نام من افتاد، با خود گفتم:

لنگ و لوک و چفته‌شکل و بی‌ادب

سوی او می‌غیژ و او را می‌طلب

و چنین کردم.

سعی کردم کتاب به صورت مقدماتی و خودکفا باشد. از ورود به فرآیندهای چندبعدی و یا فرآیندهایی در فضاها خطی پیشرفته صرف‌نظر کردم. فقط به ریاضیات تصادفی ۱- بعدی پرداخته شد. برای خودکفایی کتاب مقدمات زیادی از مطالب عمومی در توپولوژی، آنالیز ریاضی، احتمال، فرآیندهای تصادفی و مارتینگل‌ها ارائه شد. نکته دیگری که وجود این همه مقدمات را توجیه می‌کند آن است که در این زمینه آنچه که بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد روش‌هایی است که این مفاهیم بر اساس آن‌ها بنیان نهاده شده‌اند. در نتیجه تأکید بر روی این مفاهیم روش‌های کار در این زمینه بهتر معرفی می‌شوند. در فصل‌های اولیه ریاضیات عمومی با دستور تیلور آشنا شدیم ولی نمی‌دانستیم که این دستور در ریاضیات تصادفی و دستور ایتو نقش

اساسی دارد. از جمله دسته قضیه‌هایی که در این کتاب از آن‌ها استفاده اساسی و عمیق شده‌اند قضایایی هستند که ساختار توابع پیوسته و توابع اندازه‌پذیر را مشخص می‌کنند، این دسته قضایا تحت عنوان قضایای دوب-دینکین معرفی شده‌اند. در واقع اگر تابع X بر فضای توپولوژیک تولید شده به وسیله تابعی مانند Y پیوسته باشد آن‌گاه تابع یکتایی وجود دارد که $X = \varphi(Y)$. هم‌چنین اگر تابعی نسبت به σ - میدان تولید شده به وسیله تابعی مانند Y اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه تابعی از Y است. به این دسته قضایا در فصل دهم پرداخته شده‌اند. در نمایش مارتینگل‌ها از این قضیه‌ها استفاده می‌شود و نکته جالب آن که شکل تابع φ هم معرفی می‌شود. در مبحث انتگرال تصادفی مفاهیم به موازات انتگرال اشتیلتیس پیگیری می‌شود ولی در این بین تفاوت‌هایی بروز می‌کند. از جمله‌ی این تفاوت‌ها برابری

$$\int_0^t W(s) dW(s) = \frac{1}{2} W^2(t) - \frac{1}{2} t,$$

است که در عبارت $-\frac{1}{2}t$ با انتگرال ریمان اشتیلتیس متفاوت است. معرفی انتگرال تصادفی در فصل هشتم صورت می‌پذیرد.

در فصل یازدهم معادلات دیفرانسیل تصادفی معرفی می‌شود. در معادلات دیفرانسیل (چه تصادفی و چه غیر تصادفی) مسئله اساسی مسئله وجود و یکتایی جواب است. در این فصل با معرفی مفاهیمی از قبیل شرط لپشیتز و رشد خطی و نابرابری گرانوال به این دو مسئله اساسی معادلات دیفرانسیل تصادفی می‌پردازیم.

البته با بهره‌گیری از دستورهای ایتو برای برخی معادلات دیفرانسیل تصادفی جواب صریح می‌توان یافت، ولی این امر همواره میسر نیست و لازم است از طریق روش‌های عددی جواب‌های تقریبی در یک نقطه برای معادله یافت. ما به ذکر دو روش اوایلر-مارویاما و میلشتاین می‌پردازیم که روش اوایلر از مرتبه $5/5$ و روش میلشتاین از مرتبه 1 است.

فصل مستقل دوازده را به تغییرات مربعی اختصاص داده‌ایم. اگرچه در فصل‌های قبل هم به این مفهوم به نوعی پرداخته شده است، در این فصل سعی کرده‌ایم نتایج رایج و نتایج متداول تغییرات مربعی را یک‌جا جمع کنیم. از موارد استعمال تغییرات مربعی یافتن ساختار فرآیند جبران‌کننده در زیر مارتینگل‌ها است.

سرانجام در فصل سیزدهم به مسئله پالایش پرداخته‌ایم. در مسئله پالایش یک فرآیند سیگنال

که مستقیماً قابل مشاهده نیست داریم و یک فرآیند قابل مشاهده. این دو فرآیند در قالب دو معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی داده شده‌اند. در این فصل برآورد فرآیند سیگنال را به صورت جوابی از یک معادله دیفرانسیل تصادفی به دست می‌آوریم. معادله دیفرانسیل ریگاتی که در درس‌های ریاضیات عمومی تدریس می‌شود در این جا نقش مؤثر دارد.

در پایان لازم می‌دانم از تمام افرادی که در تهیه این کتاب حوصله کردند و مرا یاری نمودند تشکر کنم. همان‌طور که قبلاً ذکر کردم آقای دکتر معماریانی نقش سازنده‌ای در این زمینه داشتند. آقای دکتر صنعت‌پور معاون پژوهشی موسسه ریاضیات نیز همکاری فراوان کردند. از حوزه معاونت پژوهشی دانشگاه آقای دکتر شنبه‌زاده معاون محترم پژوهشی مشوق اصلی بودند، آقای دکتر بردبار رئیس محترم انتشارات پیگیر مراحل کار کتاب بودند و کارشناسان محترم این اداره خانم اسدی و خانم عرب با برقراری ارتباط با سایت دانپرو و انجام پیگیری‌های لازم سبب شدند کتاب به انجام برسد. حدود دو سوم کتاب به صورت کارگاه برای دانشجویان مهندسی علوم تصمیم و مهندسی دانش از دانشگاه مهندسی ارائه شد که با انتشار ویروس کرونا متوقف شد. لازم است از حوصله دانشجویان این کلاس و مدیر محترم گروه آن‌ها آقای دکتر پدرام تشکر کنم.

همچنین مایلم از دکتر مصطفایی (حمیدرضا) بخاطر ارائه مثالی در حل عددی معادلات دیفرانسیل تصادفی تشکر کنم.

در پایان از آقای سجاد اسماعیلی که واقعاً حوصله کردند و با مهارت و دقتی که در کار صفحه‌آرایی گذاشتند و کار کتاب را به سرانجام مطلوب رساندند تشکر می‌کنم. از همه این بزرگواران تشکر می‌کنم و البته اگر در کتاب خطایی ملاحظه شود (که می‌شود) بر عهده این جانب است. از تذکر خوانندگان کتاب برای اصلاح آن در چاپ‌های بعدی (ان‌شاءالله) بهره خواهم برد.

فهرست مطالب

ج	پیش‌گفتار
ص	فهرست شکل‌ها
ط	فهرست جدول‌ها
۱	۱ مروری بر توپولوژی و فضاهاى خطی
۱	۱.۱ مقدمه
۱	۲.۱ توپولوژی
۱۰	۳.۱ فضای متریک
۱۳	۴.۱ حد
۱۹	۵.۱ فضاهاى خطی
۲۱	۶.۱ عملگرهاى خطی
۲۴	۷.۱ فضاهاى خطی نرم دار
۳۳	۸.۱ ویژگی‌هاى ضرب داخلی

۴۰	۹.۱ تمرین
۴۹	۲ مروری بر آنالیز مقدماتی
۴۹	۱.۲ مقدمه
۴۹	۲.۲ تغییرات تابع
۵۱	۳.۲ مشتق
۵۸	۴.۲ تغییرات کلی مربعی
۵۹	۵.۲ انتگرال
۶۰	۶.۲ انتگرال ریمان اشتیلتیس
۶۱	۷.۲ ویژگی‌های انتگرال ریمان اشتیلتیس
۶۳	۸.۲ شرط لپشیتز
۶۳	۹.۲ رشد خطی
۶۶	۱۰.۲ تمرین
۷۱	۳ اندازه
۷۱	۱.۳ مقدمه
۷۱	۲.۳ سیگما - میدان
۷۲	۳.۳ فضای اندازه:
۷۵	۴.۳ اندازه لویگ
۸۱	۵.۳ توابع اندازه‌پذیر
۸۴	۶.۳ انتگرال
۸۹	۷.۳ تمرین
۹۳	۴ احتمال
۹۳	۱.۴ مقدمه
۹۳	۲.۴ فضای احتمال
۹۵	۳.۴ متغیرهای تصادفی

۹۸	امید ریاضی	۴.۴
۱۰۰	امید شرطی	۵.۴
۱۰۲	فضاهای L^p	۶.۴
۱۰۴	حد	۷.۴
۱۰۶	تمرین	۸.۴

۱۱۱	فرآیندهای تصادفی	۵
۱۱۱	مقدمه	۱.۵
۱۱۱	فرآیندهای تصادفی زمان پیوسته	۲.۵
۱۲۲	فرآیندهای با نمونه‌های مستقل	۳.۵
۱۲۶	تمرین	۴.۵

۱۲۹	فرآیند حرکت براونی	۶
۱۲۹	مقدمه	۱.۶
۱۲۹	فرآیند حرکت براونی	۲.۶
۱۲۹	ویژگی‌های عمومی فرآیند حرکت براونی	۳.۶
۱۳۹	فرآیند انتشار	۴.۶
۱۴۰	برخی زمان‌های توقف در فرآیند انتشار	۵.۶
۱۴۰	طرح مسائلی درباره این زمان‌های توقف	۶.۶
۱۴۶	تمرین	۷.۶

۱۴۹	مارتینگل‌ها	۷
۱۴۹	مقدمه	۱.۷
۱۴۹	مارتینگل	۲.۷
۱۵۲	انتگرال‌پذیری یکنواخت	۳.۷
۱۵۴	پیامد	۴.۷
۱۵۹	تغییرات مربعی مارتینگل‌ها	۵.۷

۶.۷	تغییر زمان	۱۶۱
۷.۷	تمرین	۱۶۳
۸	انتگرال تصادفی - انتگرال ایتو	۱۶۵
۱.۸	مقدمه	۱۶۵
۲.۸	انتگرال ایتو	۱۶۶
۳.۸	انتگرال فرآیندهای مقدماتی	۱۶۶
۴.۸	ویژگی‌های انتگرال ایتو	۱۶۷
۵.۸	تمرین	۱۸۲
۹	فرآیند ایتو	۱۸۵
۱.۹	مقدمه	۱۸۵
۲.۹	فرآیند ایتو	۱۸۵
۳.۹	دستور ایتو	۱۸۷
۴.۹	انتگرالگیری جزء به جزء	۱۹۴
۵.۹	تمرین	۲۰۱
۱۰	نمایش مارتینگل	۲۰۳
۱.۱۰	مقدمه	۲۰۳
۲.۱۰	جدابپذیری	۲۰۴
۳.۱۰	نمایش دوب - دینکین	۲۰۶
۴.۱۰	نمایش مارتینگل	۲۱۰
۵.۱۰	تمرین	۲۱۵
۱۱	معادلات دیفرانسیل تصادفی (S.D.E.)	۲۱۷
۱.۱۱	مقدمه	۲۱۷
۲.۱۱	مروری بر معادلات دیفرانسیل معمولی (O.D.E.)	۲۱۷